

博士論文

魚の集団運動に関する
包括的な理論モデルの構築
— 視覚相互作用と流体効果を中心に —

東北大学大学院 理学研究科
物理学専攻

伊藤 将

2025年(令和7年)

論文要旨

集団運動は生物の普遍的な行動様式である。個体間に相互作用が働くことで、秩序ある運動を行う群れが発生する。昆虫や鳥、魚など大型生物では、神経系を介した知覚による相互作用が働くが、これを物理学的に定式化することは挑戦的な課題である。本研究では、実験によるデータが豊富に存在し、多様な集団パターンを見せる魚の集団運動に注目する。生態学、生体運動学、神経科学などの知見を総動員し、魚種ごとのデータを整理することで、様々な魚種に適用できる普遍的なモデルパラメタを整備する。このようなアプローチにより、集団パターンの定性的な一致にとどまっていた先行モデルを超えて、物理学で求められる普遍性と生物学で重視される実験との定量的な一致を兼ね備えた包括的な理論を構築する。以下は、本研究の4テーマについての概要である。

巨大回転魚群のモデル化：魚群は多様な回転パターンを示し、その大きさは体長の数十倍を超える。本論文の第5章では、巨大回転魚群を再現するために、各個体が相互作用できる相手の数を制限した自己駆動粒子モデルを導入する。このモデルに自律的な引力相互作用の制御を組み込むことにより、球状、トーラス状、リング状などの体長の数十倍以上の大きさの巨大回転魚群を再現する。さらに、個体数とクラスターの大きさとの間にスケールリング則が成立し、実験結果とよく一致することを示す。また、第6章では、重力場の感知による鉛直方向運動の抑制をモデルに取り入れることで、トーラス状クラスターが鉛直方向に大きく伸長した円柱状の回転魚群を再現する。これらにより、長距離相互作用や各個体のカイラリティを仮定することなく、巨大回転魚群の形成メカニズムを解明する。

逆カルマン渦を介した相互作用のモデル化：魚が他の個体の尾ヒレから放出される渦を群れ運動の中でどのように利用しているかは、長年の未解決問題であった。第8章では、渦を介した流体相互作用により魚が尾ヒレの運動を制御するメカニズムを解明するため、能動的に運動する平板を備えた個体によるモデルを導入する。単独個体に対して、本モデルは、遊泳速度と尾ヒレの運動の振動数の線形関係に加え、速度、尾ヒレの運動の振幅、振動数の分布を再現する。2個体の場合、前後距離および尾ヒレの運動の位相差に対する確率分布、およびエネルギー散逸率は周期的パターンを示し、実験とよく一致することを示す。さらに、2個体が流体相互作用により自発的に距離と位相差を調整し、エネルギー消費を低減することを示す。

選択的意思決定を考慮した視覚モデルの構築：魚の集団運動において、視覚情報は相互作用を決定する上で極めて重要な役割を果たす。近年の実験により、魚類や昆虫などの生物は、視覚情報の一部のみを選択的に利用することが明らかになってきた。第10章では、近傍の個体の像から得られる視覚刺激によって、視覚の注意の方向が誘導される自己駆動粒子モデルを構築する。本モデルは、2個や3個の標的の間の距離が増加する際に、魚が標的を選択的に追従する分岐現象を再現する。さらに、多数の個体の群れでは、4つの定常的な集団パターンを示す。また、像の位置関係による視覚の遮蔽の効果を検討することによ

り，視覚相互作用のトポロジカルな性質から，第 5, 6 章の現象論的相互作用について考察する．これらにより，既存の実験結果との包括的比較を通じて，視覚相互作用の役割を明らかにする．

視覚相互作用のボルツマンアプローチによる定式化：視覚情報を介した相互作用は，本質的に非局所的であり，遮蔽の影響により多体的相互作用となるため，数値計算では巨大な群れを扱うことが難しい．第 12 章では，非局所的視覚相互作用を取り入れたボルツマン方程式を導入する．遮蔽効果は粗視化された密度場を介して自己無撞着的に扱われ，これにより相互作用は有効的な 2 体相互作用となる．配向相互作用の強度をパラメタとして，秩序－無秩序の転移点を解析的に導出し，遮蔽効果が転移しきい値を上昇させること，遮蔽効果は数密度や相互作用範囲を無限大にしても消失しないことを示す．さらに，本モデルは局所相互作用モデルと同様に不連続転移を示すが，非局所性によってその不連続性が弱められることを示唆する．

以上により，複雑な知覚行動が関与する魚の相互作用を，実験的知見に基づきモデルの構築へと結びつけ，得られた結果を実験結果と比較・検証するという研究プロセスの有用性を示す．本研究は，他の生物種への拡張に加えて，集団ロボットやドローン群の制御への応用も期待され，知覚と運動の相互作用による群れの理解に資する重要な基盤となり得る．

目次

1	序論	1
1.1	集団運動とは	1
1.2	集団パターンの普遍性と分類	2
1.3	魚群の集団パターン	4
1.4	配向パターンの特徴	4
1.5	回転パターンの特徴	5
1.6	群れの秩序変数	6
1.7	自己駆動粒子	7
1.7.1	集団運動のモデル化	8
1.7.2	アクティブコロイド粒子	9
1.8	Vicsek モデル	10
1.8.1	Vicsek モデルの発展	11
1.9	本研究の目的	13
2	遊泳の機構	15
2.1	魚種と泳法	15
2.1.1	BCF 型泳法	15
2.2	流体力学的指標	17
2.2.1	レイノルズ数とストローハル数の関係	17
2.3	遊泳速度と尾運動の関係	18
2.4	遊泳速度と持続時間	19
2.4.1	赤筋と白筋	20
2.5	定常遊泳, fast-start の神経回路	21
2.5.1	定常遊泳の神経回路	21
2.5.2	fast-start の神経回路と運動様式	22
2.6	逆カルマン渦の発生	22
2.6.1	逆カルマン渦の構造	23
3	魚間相互作用の分類	25
3.1	魚間相互作用の成因	25
3.2	現象論的相互作用の実験観測	26
3.2.1	相互作用の性質と範囲	26
3.2.2	トポロジカル相互作用	27
3.2.3	fast-start による配向の高速伝播	28
3.3	逆カルマン渦による受動流体相互作用	28
3.3.1	逆カルマン渦を用いた流体抵抗削減の古典的考察	28
3.3.2	逆カルマン渦を用いたエネルギー削減策略	29
3.4	視覚を介した相互作用	32

3.4.1	網膜の構造と脳への情報伝達	32
3.4.2	視覚刺激の像サイズ依存性	33
3.4.3	選択的意思決定	34
4	回転魚群に対する先行モデル	37
4.1	メトリック相互作用型モデル	37
4.1.1	ポテンシャル型モデル	38
4.1.2	ゾーン型モデル	39
4.2	トポロジカル相互作用型モデル	41
4.2.1	ボロノイ分割型モデル	41
4.2.2	視覚型モデル	44
5	巨大回転魚群のモデル化	46
5.1	モデルの定式化	46
5.1.1	各パラメタ値の実験値との対応	48
5.1.2	初期条件の設定	49
5.2	測定量の導入	51
5.3	集団パターンと相関	52
5.3.1	集団パターンの分類	52
5.3.2	集団パターンの相関	56
5.4	クラスターのサイズ	57
5.4.1	サイズと粒子数のスケーリング則	58
5.5	回転クラスター中の粒子の運動	59
5.5.1	動径方向の運動の時間相関	61
5.5.2	ring のちぎれと再生	62
5.6	回転パターンの内部構造	63
6	魚群集団運動に対する重力場の効果	66
6.1	重力場の効果のモデル化	66
6.2	集団パターンの鉛直伸長	66
6.2.1	回転パターンの出現頻度の ζ 依存性	67
6.2.2	回転クラスターのサイズ	68
6.2.3	polarized school のサイズと数密度分布	69
6.3	鉛直方向への粒子の運動	71
6.4	渦軸の運動の抑制	72
7	遊泳と流体相互作用の先行モデル	74
7.1	単独遊泳のモデル化	74
7.1.1	古典モデル	74
7.1.2	板や翼による近似モデル	75
7.2	流体相互作用のモデル化	78

7.2.1	数値流体力学計算によるモデル	78
7.2.2	振動翼による近似モデル (実験)	79
7.2.3	弾性棒や振動翼による近似モデル (理論・数値計算)	80
8	逆カルマン渦を介した相互作用のモデル化	82
8.1	モデルの定式化	82
8.1.1	モデルの概略	82
8.1.2	質量, 尾の慣性モーメント	83
8.1.3	尾の弾性	84
8.1.4	尾のアクティブトルク	84
8.1.5	ランキン渦列場	85
8.1.6	尾の抗力・揚力	86
8.1.7	尾の付加質量による力	88
8.1.8	体にかかる抵抗	89
8.1.9	時間発展方程式の整理	90
8.1.10	各パラメタ値の実験値との対応	91
8.1.11	シミュレーションのセットアップ	92
8.2	単独遊泳での結果	92
8.2.1	尾の振幅の決定	93
8.2.2	推進速度と尾運動の振動数の関係	94
8.2.3	尾運動の軌跡	95
8.2.4	推進速度とストローハル数の C_T , χ_c 依存性	95
8.2.5	重心速度, 振幅, 振動数に対するノイズの影響	96
8.2.6	尾運動の位相とエネルギー散逸率	99
8.3	ペア遊泳についての結果	101
8.3.1	距離と位相差の確率分布	101
8.3.2	エネルギー散逸率の距離依存性	102
8.3.3	2 個体の自発的接近	104
8.3.4	エネルギー散逸率の最適化問題	105
8.3.5	エネルギー散逸率の d_{\perp} 依存性	107
9	選択的意思決定の先行モデル	108
9.1	確率分布を利用したモデル	108
9.2	スピンによる相転移を利用したモデル	109
10	選択的意思決定を考慮した視覚モデルの構築	112
10.1	モデルの定式化	112
10.1.1	視線の時間発展方程式	112
10.1.2	信号の関数	113
10.1.3	力の発生と運動方程式	116
10.1.4	力の関数	116

10.1.5	パラメタ	118
10.1.6	数値計算手法	120
10.2	標的に対する選択的意思決定	121
10.2.1	初期条件と時間発展	122
10.2.2	標的の追跡と確率分布	123
10.2.3	従来型のモデルとの比較	126
10.2.4	確率分布のパラメタ依存性	127
10.2.5	標的の位置の非対称性	128
10.3	集団運動とパターン相関	129
10.3.1	集団パターンの分類	130
10.3.2	集団パターンの相関	132
10.3.3	集団パターンのパラメタ依存性	133
10.3.4	polarized school の初期条件依存性	135
10.4	視覚の遮蔽効果とトポロジカル相互作用	137
10.4.1	クラスター中の視覚情報	137
10.4.2	遮蔽効果とトポロジカル距離の関係	137
10.4.3	相互作用とトポロジカル距離の関係	139
10.5	2体相互作用と3体相互作用の力の分布	141
10.5.1	力の分布の測定方法	141
10.5.2	2個体の場合の分布	141
10.5.3	3個体の場合の分布	142
11	ボルツマン方程式による先行モデル	145
11.1	ボルツマン方程式の導入	145
11.1.1	自己拡散項	145
11.1.2	2体衝突項	146
11.1.3	ボルツマン方程式の適用条件	146
11.2	ボルツマン方程式の線形安定性解析	146
12	視覚相互作用のボルツマンアプローチによる定式化	148
12.1	モデルの導出	148
12.1.1	遮蔽効果因子	149
12.1.2	内在効果因子	150
12.1.3	モデルの適用条件	151
12.1.4	パラメタの設定	151
12.2	線形安定性解析	152
12.3	相転移と転移点の解析	154
12.3.1	転移点の性質	154
12.3.2	パラメタの極限での転移点の挙動	155
12.3.3	配向秩序変数のスケーリング則	156
12.3.4	相転移の次数	158

12.4	局所 2 体衝突モデルへの極限	158
12.4.1	局所 2 体衝突モデルでの $K(\psi)$	158
12.4.2	局所 2 体衝突モデルとの対応	159
13	結論	161
	付録	166
A	ヒルベルト変換	166
B	一様なトーラスの主慣性モーメント	168
C	渦軸の運動による動径距離のシフト量	169
D	回転する円柱状クラスターの回転秩序変数	170
E	2次元楕円柱の付加質量	171
F	ペア遊泳時のエネルギー散逸率における横縞状の位相差依存性	174
G	鉛直角直径の計算手法	175
H	個体の平均弧長 $D(R)$ の導出	177
I	線形安定性解析の計算	178
I.1	δf を含まない項の整理	178
I.2	空間積分の扱い	180
I.3	ボルツマン方程式のフーリエ成分	181
I.4	減衰率の計算	183
	発表リスト	185
	参考文献	187
	謝辞	195

1 序論

1.1 集団運動とは

生物の群れのように、多数の自発的に運動する要素が相互作用することで集合し、秩序を形成して運動する現象を**集団運動**とよぶ [1]. 図 1 に数例を示す. 群れをなす生物学的な利点は、多くの生物種で観測される効率的な採餌行動・繁殖, アリやハチにおける社会性カーストの構築, 魚や鳥などに見られる捕食者に対する防衛, 周囲の流体からの抵抗の削減などが挙げられる [2].

このような集団運動を特徴付けるためには、個々の個体の挙動と群れ全体の運動の双方

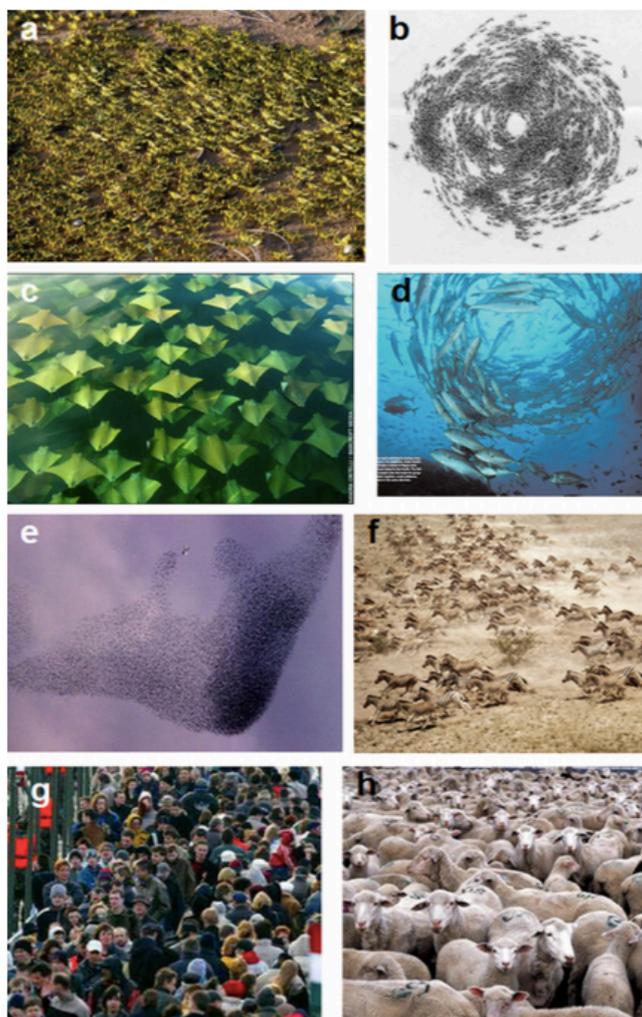


図 1: 様々な生物の集団運動. (a) 平原を進行するサバクトビバッタの群れ. (b) 回転するグンタイアリの群れ. (c) 隊列を組むウシバトビエイの群れ. (d) 渦状のギンガメアジの群れ. (e) 捕食者の大型の鳥から逃げるムクドリの群れ. (f) 草原を進行するシマウマの群れ. (g) 歩道橋で 2 列に別れ歩くヒトの群れ. (h) その場でとどまり個々の向きがバラバラなヒツジの群れ. 図は [1] より許可を得て転載.

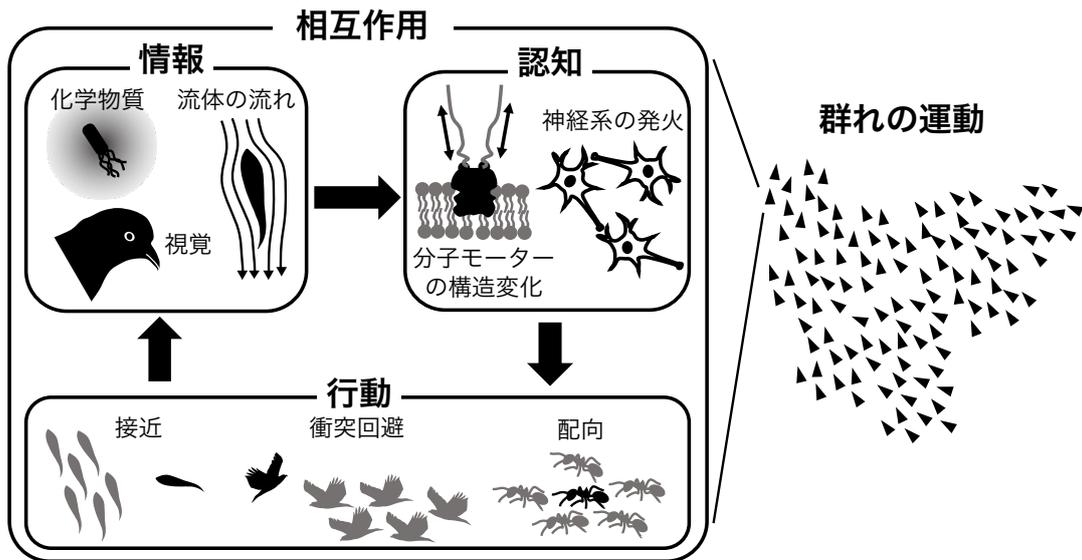


図 2: 集団運動の要素の模式図. 集団の中で各個体は情報を知覚し, それをもとに行動に移すことを繰り返す. この各個体の複雑な運動の変化が多様な集団運動を生み出す. 情報: 化学物質の濃度勾配を利用するバクテリア. 視覚情報を用いる鳥. 流体の流れを読み取る魚. 知覚: 化学物質に反応して構造変化する分子モーター. 網膜などの神経器官から送られる電気信号によって発火するニューロン. 行動: 群れに接近する魚. 衝突回避をする鳥. 互いの向きを揃えるアリ.

を理解する必要がある. この理解のプロセスには「個体」, 「情報」, 「知覚」, 「行動」, 「群れの運動」という要素が含まれる (図 2). 各個体同士がどの情報をどのように知覚するか, そこでどのような行動が生まれ, 群れ全体の運動としてどのように表現されるのか. 集団運動を記述するためには, これらを理解することが大きな目標となる.

換言すれば, 集団運動を定量的に評価することは, ミクロからマクロを理解する統計物理学的発想が必要不可欠といえることができる. よく知られた強磁性体の自発磁化 [3] になぞらえれば, 個体は「スピン」に, 情報は「スピンの向き」, 知覚は「交換相互作用」, 行動は「互いにスピンの向きを揃える」, 群れの運動は「スピンの向きの揃ったドメインが形成される」と対応させることが可能である. 一方で, 生物の集団運動の場合は, 知覚, 行動の部分の複雑さが理解をより一層困難にしている. すなわち, 知覚は神経系を媒介とするネットワークからなることも多く, 行動は主に生物種の体の構造や習性に依存するため, これらが物理的記述の困難性をもたらしている.

1.2 集団パターンの普遍性と分類

このように, 情報, 知覚, 行動という集団運動の要素は生物種に大きく依存するため, 集団運動は普遍性を旨とする物理学に昇華しにくいとも考えられる. しかし, この相互作用の複雑さにもかかわらず, 集団運動のなすパターン形態には一定の普遍性が存在する [1, 4]. 以下では, このパターン (形態) のことを**集団パターン**と呼ぶこととし, ここで**集団パターン**の分類について述べる.

集団パターンは空間次元と秩序に基づき分類することが可能である．空間次元は，その集団が2次元空間(図1(a), (b), (f), (g), (h)), 3次元空間(図1(c), (d), (e))のどちらに存在するかを示す．他方，群れの秩序は，強磁性体のスピンの配向秩序などと同じく，系の整然さを表現する．群れの秩序は，集団パターンそのものと密接に結びついている．例えば，

- ・(i) 互いに向きがバラバラで配向の秩序がないもの(図1(h))
- ・(ii) 互いに向きが揃っており配向秩序を持つもの(図1(a), (c), (e), (f), (g))
- ・(iii) 一方向に回転する構造を持つもの(図1(b), (d))

がある[4]．

このようにして，マクロな集団パターンに関しては一定の分類が可能であるが，ミクロの部分である相互作用は上述の通り生物種に依存する部分が多く，その普遍的な記述の可能性についてはまだまだ研究が進んでいない．集団運動の研究には，どのような相互作用が多様な集団運動を支えているのか，要素となる相互作用の本質を理解することが望まれる．その要素を抽出するためにも，本研究では特に多様な集団パターンを見せる魚の群れ(魚群)を対象とする．本研究は，相互作用の普遍性の理解のための基礎的な知見を与えるものとして位置づけられる．

以下，この第1章では，魚群の特徴について他の生物との比較を概観した後，集団運動一般を記述する基礎的な理論的概念や手法を導入する．

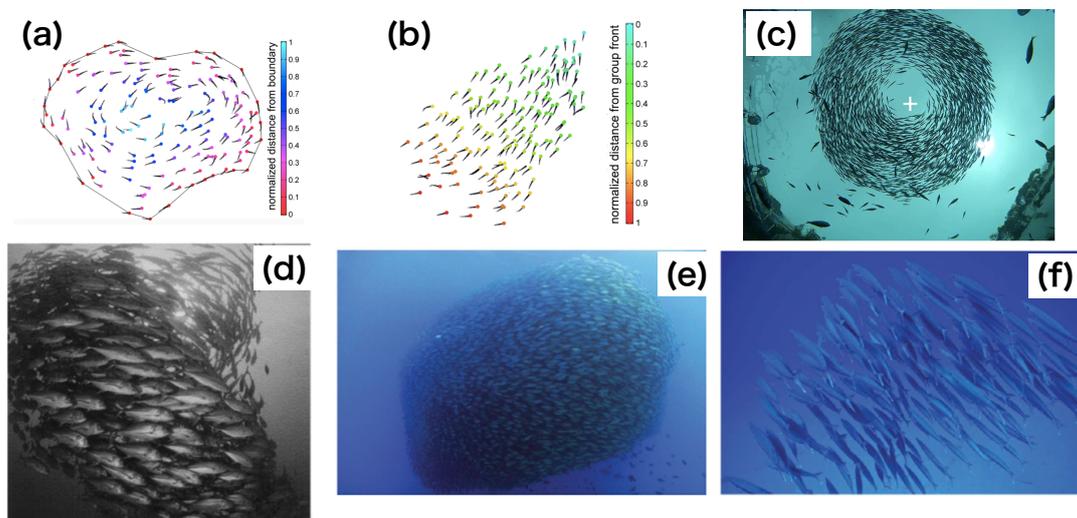


図3: 様々な魚の群れのパターン．(a), (b) ゴールデンシャイナーの群れ [5]．(a) 円板状の回転パターン．(b) 向きの揃った配向パターン．(c) イワシのトーラス状の回転パターン [6]，(d) ギンガメアジの円柱状の回転パターン [7]，(e), (f) オニカマス [8] の群れ．(e) 球状の回転パターン．(f) 向きの揃った配向パターン．図はそれぞれの文献より許可を得て転載．

1.3 魚群の集団パターン

魚は様々な集団パターンを示すことで知られる [5–8]. 特に, その大きさは体長の数十倍の大きさを持つ [6]. 図 3 にいくつかの一例を示す. 図 3(a), (b) は浅い川や湖に生息する淡水魚の群れを浅い水槽で遊泳させた時の集団パターンである. 水槽は浅いため, 魚同士が鉛直方向に重なりにくく準 2 次元系とみなすことができる. この場合, (a) 円板型の回転パターン, (b) 配向パターンが見られる. 図 3(c), (d), (e), (f) は巨大水槽や海中での海水魚の群れの集団パターンである. 配向パターン (図 3(f)) に加え, 回転パターンに関しては, トーラス状 (図 3(c), 特に中心の穴が比較的小さい状態が慣習的にトーラス状と呼ばれる), 円柱状 (図 3(d)), 球状 (図 3(e)) というように, その形状は極めて多彩である. 球状回転パターンはベイト・ボール (bait-ball, 直訳は「餌の玉」) と呼ばれ, 捕食者から身を守る時に見られる典型的なパターンである [8]. 以下では, 回転パターンと配向パターンそれぞれの特徴について述べていく.

1.4 配向パターンの特徴

「向きが揃っている」という場合, 広い意味では一般に 2 種類の配向パターンが考えられる. 各個体が極性を持つ場合と極性を持たない場合が存在する. 極性を持たず配向パターンを作る生物として大腸菌が挙げられる [9]. 大腸菌は棒状の菌体を持っており, べん毛を用いて一定の向きに運動する. 2 個の大腸菌が衝突した場合に, 衝突角度が鋭角か鈍角かに応じて, 運動の向きが平行にそろう場合と反平行にそろう場合の 2 パターンの配向様式が生じる (図 4(a)). つまり, 菌体の頭部と尾部が区別できない対称的な形状を持つため, 平行にも反平行にも方向を揃えることが可能である. 図 4(b) のような極性を持たない配向パターンは, 同じく極性を持たず配向するネマチック液晶 (図 4(c)) [10] との類似から, ネマチック型の配向パターンとも呼ばれる.

一方で, 魚を含め脊椎動物や甲殻類, 昆虫などの動物は, 個体が頭部と尾部が区別できるという意味で極性を持ち, 平行に向きを揃えた群れを作る. つまり, この場合は群れ全

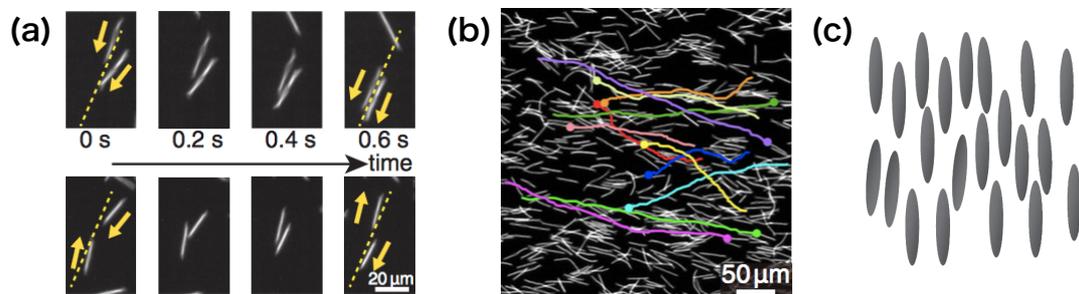


図 4: (a, b) ネマチック型の配向パターンをなす大腸菌の変異株の群れ [9]. (a) 2 個体が向きを揃える様子. 上図は運動の向きが同じ場合. 下図は運動の向きが逆の場合. (b) 群れのスナップショット. 色のついた線は各個体をトレースしたときの軌跡を表す. (c) ネマチック液晶の概念図 [10]. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

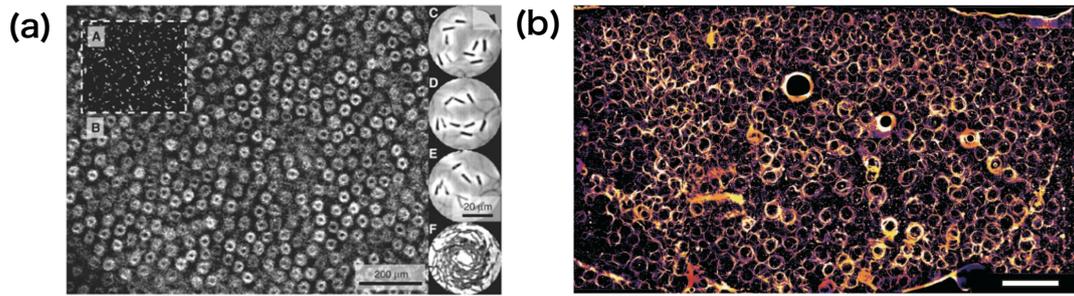


図 5: 特定の方向に回転する群れ. (a) ウニの精子 [12], および (b) 微小管 [13] の集団における準 2 次元系 (トレー上) での格子状に並んだ渦. (a) と (b) の両方で基板上方から見て, 時計回りの渦ができています. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

体が極性を持って一つの向きに進行する. 魚群もこの極性配向パターンを示す. また, 極性を持つ個体の配向機構は, 大腸菌の場合のような力学的な相互作用だけではなく, 視覚を通じた相互作用など, より複雑なものであると考えられる.

以下では, 「配向パターン」や「向きが揃う」という用語は断りがなければ, 各個体は頭の向きに進行し, 各個体間で運動の向きが揃っていることを意味するものとする.

1.5 回転パターンの特徴

魚群の回転パターンの特徴を明らかにするために, 他の生物の系との比較を行う. まず, 各個体が持つ構造上の特徴に起因して, 集団では特定の方向に回転する系が存在する [12,13]. 精子の場合, 平面基板上で集団では, 遊泳時の鞭毛のらせん状の回転運動による基板との流体相互作用を介して, 基板上方から見て時計回りの渦が生じる (図 5(a)) [12]. また別の例として, 微小管と呼ばれる生体フィラメント (弾性棒状の生体分子) は, キネシンと呼ばれる分子モーターによって動かされる. このとき, 微小管のらせん状の分子構造に起因して固有の回転方向を示す. 従って, 多数の微小管が平面基板上に存在する系では基板上方から見て時計回りに回転する渦を形成する (図 5(b)) [13].

続いて, 系の形状や境界との相互作用によって時計回りと反時計回りの両方の回転が生じる系を考える [14,15]. 枯草菌と呼ばれるバクテリアの群れは, 円形トレーに入れられた際に渦を生じる (図 6(a)). 図 6(b) にあるように, 境界付近の流れ場はバルク中心付近の渦の流れ場と逆向きであることがわかる (図 6(c) も参照). この境界付近にいる枯草菌が境界壁に対して一定方向に傾いて整列し, 後方に向かって流れ場を生じさせるため, バルク中心付近の渦が安定する (図 6(d)). つまり, この渦は円形の境界が存在するために, 安定に保たれる. 枯草菌が境界壁に対してどちら向きに傾くかは初期条件に依存してランダムに決まるため, この系では, 個体と境界との相互作用によって回転方向の対称性が自発的に破れていると言える. 実際, この渦は時計回り, 反時計回りが等確率で生じる.

一方で魚の場合, 渦が生じる原理は上記 2 つとは異なっている. 例えば, 浅い水槽での淡水魚 (ゴールデンシャイナー) の群れの観測から, 群れは固有の回転方向を持たず, 時計回りと反時計回りの渦が等確率で生じることがわかっている [16]. 加えて, 図 3(c), (d), (e), (f) などからもわかるように, 渦は巨大水槽や海中で形成され, 水槽の壁や海岸, 海面

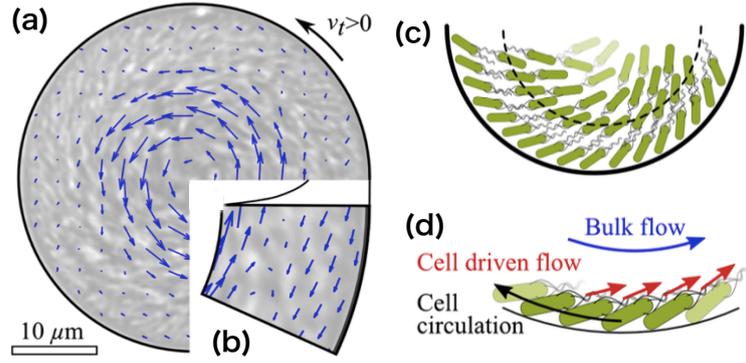


図 6: 円形トレーに閉じ込められたの枯草菌の群れ. (a) 実験のスナップショット. 矢印は枯草菌の群れを懸濁液とみなしたときの流体速度場を表す. (b) 境界付近の拡大図. (c, d) 渦形成の概念図. (c) は境界付近とバルク中での枯草菌の配向の様子を示す. 図は [14] より許可を得て転載.

といった境界からは十分に離れているため, 境界の存在は回転パターンの形成に必要なではない. このように, 魚群は個体間の相互作用のみによって自発的に対称性を破り, 回転パターンを形成している.

1.6 群れの秩序変数

集団パターンを定量的に評価するための秩序変数を導入する. まず, 群れの向きの揃い具合を表現する秩序変数として配向秩序変数 P があり, 一般に以下のように書かれる [16].

$$P = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \hat{v}_i \right|. \quad (1)$$

ここで, N は個体数, $i = 1, 2, \dots, N$ は個体番号, $\hat{v}_i = \mathbf{v}_i / |\mathbf{v}_i|$ は個体 i の規格化された速度ベクトル (運動の向きを指す単位ベクトル) である. この P は式 (1) の定義からわかるように 0 から 1 までの値を取り, $P = 0$ は個体間の向きが完全にランダムな集団パターン, $P = 1$ は向きが完全に一致している配向パターンに対応している (図 7(a)).

また, 2次元系に限定する場合は, \hat{v}_i と x 軸のなす角を θ_i とすれば, $\hat{v}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ となるため, 複素表示で

$$P_{2D} = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} \right| \quad (2)$$

と書かれることも多い [17]. ちなみに, 先ほどの大腸菌の群れ (図 4(b)) のようなネマチック型の配向パターンは, 個体に極性がないので

$$S_{2D} = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{2i\theta_i} \right| \quad (3)$$

で定義されるネマチック秩序変数が 1 に近い配向パターンとして定量化できる [11].

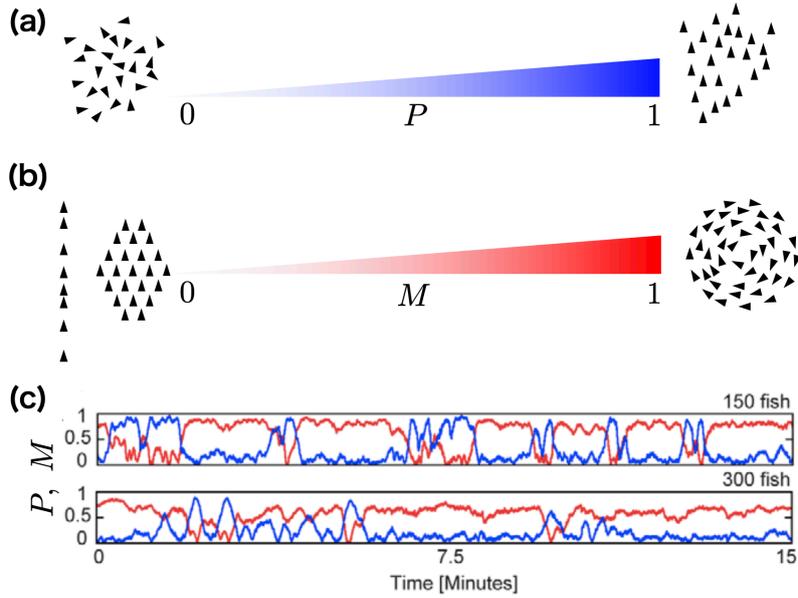


図 7: 秩序変数と集団パターンの対応関係. (a) 配向秩序変数 P , (b) 回転秩序変数 M と集団パターンの対応. (c) 150 匹, 300 匹のゴールデンシャイナーの群れでの秩序変数の時間発展 [16]. 青の線が P , 赤の線が M を表す. 図は [16] より許可を得て転載.

続いて, 群れの回転の向きのそろい具合を表す回転秩序変数 M は次のように定義される [16].

$$M = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{c}}_i \times \hat{\mathbf{v}}_i \right|. \quad (4)$$

ここで, $\hat{\mathbf{c}}_i = \mathbf{c}_i / |\mathbf{c}_i|$ は群れの重心を基準とした個体 i の相対位置ベクトルを規格化したものである. すなわち, 個体 i の位置を \mathbf{r}_i としたとき, 系の重心は $\mathbf{r}_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i$ であり, $\mathbf{c}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G$ と定義している. $\hat{\mathbf{c}}_i \times \hat{\mathbf{v}}_i$ は重心周りの角速度に平行なベクトルとなる. 配向秩序変数 P と同様に M も 0 から 1 までの値をとる. $M = 0$ は直線上の配向パターンや各個体が同一の速度で進行する対称性のよい配向パターンなどで実現し, $M = 1$ は重心を中心とした同心円上を同一方向に回る回転パターンで生じる (図 7(b)). ただし, 必ずしもすべての回転パターンに対して $M \approx 1$ になるとは限らない. 例えば, 回転する群れの中に時計回りと反時計回りの個体が同数だけ存在する場合は $M = 0$ となる. このような, 2つの回転方向が1つの群れに同時に存在する回転パターンとしては, ミクソバクテリアの群れで知られている [18].

図 7(c) は, 数百匹の淡水魚の群れで P と M を実際に測定したときの時間発展の様子で [16], 群れのパターンを見ずとも秩序変数の変動から配向パターン, 回転パターンがどの時刻で出現しているかが定量的にわかるようになっている.

1.7 自己駆動粒子

集団運動を記述するための概念として自己駆動粒子を導入する. 自己駆動粒子とは端的に言えば, 自己の内部に蓄えたエネルギーを運動のエネルギーに変換して外部から特定の

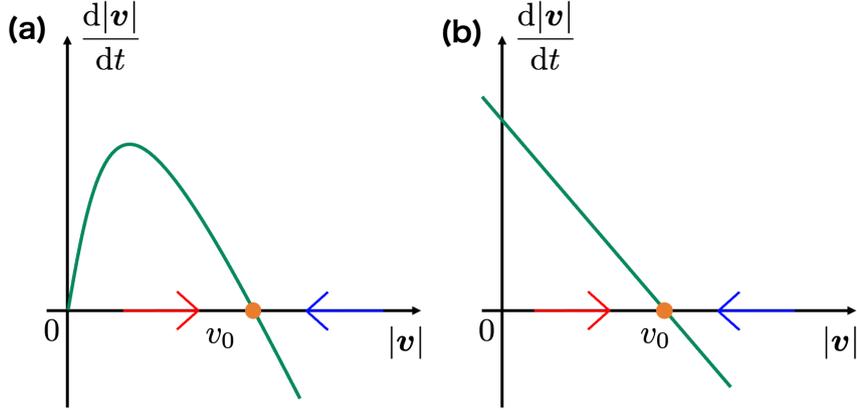


図 8: 自己推進項の解釈. $d|v|/dt$ を $|v|$ の関数としたとき, 式 (7), 式 (9) はそれぞれ (a), (b) のようにプロットできる. このとき, $d|v|/dt > 0$ となるような $|v|$ では, 時間発展の後, $|v|$ は増加するとわかり (赤の矢印), $d|v|/dt < 0$ となるような $|v|$ では, $|v|$ は減少するとわかる (青の矢印). 従って, 時間発展によって $|v|$ は v_0 (オレンジの点) に近づいていく.

向きの駆動力を受けることなく推進する粒子のことである. 自己駆動粒子は理論的な概念であり, その実例として人工的な粒子 [19, 21, 22] と生物個体がある.

1.7.1 集団運動のモデル化

自己駆動粒子モデルの基本的理念は, 自己推進する粒子の間に相互作用が働くことで, 多粒子系では多様な集団運動が形成されると考えることにある [17, 20]. 従って, 各粒子の時間発展の方程式を定式化の上では, 自己推進の項と相互作用の項をどのようなものにするかが重要になってくる. 相互作用の定式化についてはモデルによって多種多様であるため, 後に詳しく述べる. 自己推進の定式化についてまとめる.

自己駆動粒子の運動の時間発展方程式は, 連続時間発展型 [24, 25] と離散時間発展型 [17] の 2 種類に大別される. 連続時間発展型は運動方程式を模しており, 粒子 i (位置 \mathbf{r}_i , 速度 \mathbf{v}_i) の運動は

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_{\text{self},i} + \mathbf{F}_{\text{int},i} \quad (5)$$

という微分方程式で記述される. ここで, $\mathbf{F}_{\text{self},i}$ が自己推進の速さを決定する項, $\mathbf{F}_{\text{int},i}$ は相互作用を表す項である. $\mathbf{F}_{\text{self},i}$ のよくある定式化として, 速度 \mathbf{v}_i で展開した非線形型 [25]

$$\mathbf{F}_{\text{self},i} = \alpha(v_0^2|\mathbf{v}_i| - |\mathbf{v}_i|^3)\hat{\mathbf{v}}_i \quad (6)$$

が存在する (時間依存ギンツブルグ・ランダウ方程式 [3] における磁化や超伝導での波動関数といった秩序変数が, 速さ $|\mathbf{v}_i|$ に置き換わったものとみなせる). ただし, α, v_0 は正の

定数であり、 $\hat{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i/|\boldsymbol{v}_i|$ である。式 (6) の物理的意味は、相互作用がない状況 ($\boldsymbol{F}_{\text{int},i} = 0$) を考えると明快である。この場合、自己推進の方向は一定なので、速度 $\boldsymbol{v}_i (= |\boldsymbol{v}_i|\hat{\boldsymbol{v}}_i)$ の方程式は速さ $|\boldsymbol{v}_i|$ の方程式に還元できて

$$\frac{d|\boldsymbol{v}_i|}{dt} = \alpha(v_0^2|\boldsymbol{v}_i| - |\boldsymbol{v}_i|^3) \quad (7)$$

となる。このとき、左辺と右辺の関係は常微分方程式の図式化 [26] によって図 8(a) のように表され、速さが $|\boldsymbol{v}_i| \rightarrow v_0$ にダンピングする性質を持っているとわかる。つまり、式 (6) は、各粒子が速さ v_0 で自己推進しようとしていることを表現している。

また、この非線形型の力の表式 (6) の $|\boldsymbol{v}_i| \rightarrow v_0$ にダンピングする性質をより簡単に定式化したものとして線形型 [24]

$$\boldsymbol{F}_{\text{self},i} = \alpha(v_0 - |\boldsymbol{v}_i|)\hat{\boldsymbol{v}}_i \quad (8)$$

もよく用いられる。この場合、相互作用がない場合は、

$$\frac{d|\boldsymbol{v}_i|}{dt} = \alpha(v_0 - |\boldsymbol{v}_i|), \quad (9)$$

という自己推進の速さの方程式となる。これは、非線形型を v_0 の周りで線形化したものであり、図 8 に示すように、やはり $|\boldsymbol{v}_i| \rightarrow v_0$ にダンピングする。

一方で、離散時間発展型では、一般に粒子の速さ v_0 は一定で、粒子の運動の向きのみが相互作用で変化していくことが一般的である。つまり、離散時間発展型では、速さは一定値に緩和しているとみなして考えている。離散時間ステップを Δt として、粒子 i の時間発展は

$$\boldsymbol{r}_i(t + \Delta t) = \boldsymbol{r}_i(t) + v_0\hat{\boldsymbol{v}}_i(t)\Delta t, \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i(t + \Delta t) = \hat{\boldsymbol{v}}_i(t) + \boldsymbol{F}_{\text{int},i}(t)\Delta t \quad (10)$$

として記述される。

1.7.2 アクティブコロイド粒子

本研究は生物系を例とする自己駆動粒子モデルに主眼を置くが、ここで人工的な粒子の例についても触れておく。代表的な例がヤヌス粒子などのアクティブコロイド粒子と呼ばれるものである [19]。ヤヌス粒子とは、図 9(a, c) にあるような、半分が別の物質でコーティングされたコロイドである。これらは、化学物質 (過酸化水素) の濃度勾配によって駆動し、集合・分離を繰り返すような集団運動を見せたり (図 9(b)) [21]、交流電場をかけた時の金属部の静電誘導と誘電体部の誘電分極による電気的性質の違いから回転駆動力を得て (クインケ効果と呼ばれる)、列状や数珠状の集団運動を示す (図 9(d)) [22]。このような人工的な粒子を用いる利点としては、粒子間の相互作用が理論的に導出可能で、実験的にも相互作用を支配するパラメタを調整しやすいという点にある。つまり、どのような集団パターンがどのような相互作用によって生じるのか、生物学的複雑さを介さず明確に定量化できるということである。また、コロイドの半球部分をコーティングするのではなく、コーティングされた四角錐や八面体のコロイドを直接的に球状コロイドに付けることで、コロイドのカイラリティに依存した複雑な集団パターンをもたらすカイラルヤヌス粒子 [23] も考えられている。

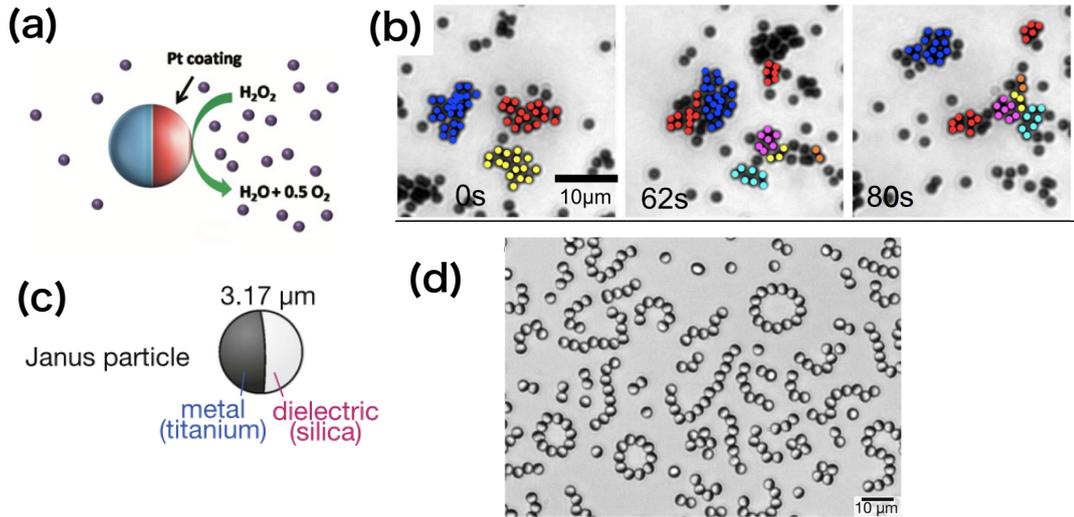


図 9: ヤヌス粒子とその集団運動の例. (a) 金のコロイドにプラチナをコーティングしたヤヌス粒子 [19]. (b) 図 (a) の粒子の集団運動のスナップショット [21]. (c) 二酸化ケイ素のコロイドにチタンをコーティングしたヤヌス粒子 [22]. (d) 図 (c) の粒子の集団運動のスナップショット [22]. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

1.8 Vicsek モデル

自己駆動粒子を用いたモデル化の具体例として, Vicsek モデル [17] に触れる. Vicsek モデルとは, 配向パターンを出現させる最も単純な離散時間発展型モデルの 1 つである. 歴史的には, 2 次元 2 自由度の古典スピンモデル (XY モデル) [27] において, スピンが自己推進するようなモデルとして Vicsek モデルが提案された. 2 次元の Vicsek モデルでは, 式 (10) において, 位置 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$, 向き $\hat{\mathbf{v}}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ とする. 向きの時間発展は, x 軸からの角度 θ_i の時間発展の式

$$\theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + \text{Arg} \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i(t)} e^{i\theta_j(t)} \right) + \Delta\theta_i(t) \quad (11)$$

に置き換えて定式化される. ただし, 相互作用半径を R として, \mathcal{V}_i は粒子 i から見て半径 $r < R$ の領域の中に入っている粒子の集合であり, 図 10(a) に具体例を示す. 式 (11) の右辺第 1,2 項は, 半径 r の領域に入っている粒子の向き (角度) の平均値に粒子 i が向きを変更することを意味している. 言い換えれば, 近傍にいる粒子たちから向きの情報を読み取り, 自身もそれらの粒子と向きを揃えようとするということが定式化されている. また, $\Delta\theta_i$ は $[-\eta/2, \eta/2]$ の範囲を持つ一様分布から採択される角度のノイズである. このノイズの役割は, 生物学的に言えば, 必ずしも正確に各個体の向きを理解し正確に平均の方向を向くわけではないという限界を表現している. あるいは, 平衡スピン系の熱揺らぎに相当する役割を持っているといってもよい.

このようなモデルを用いて実際にシミュレーションした結果が図 10(b, c) に示してある. ただし, 初期条件は図 10(b) のように位置, 向き共にランダムで, 境界条件は周期境

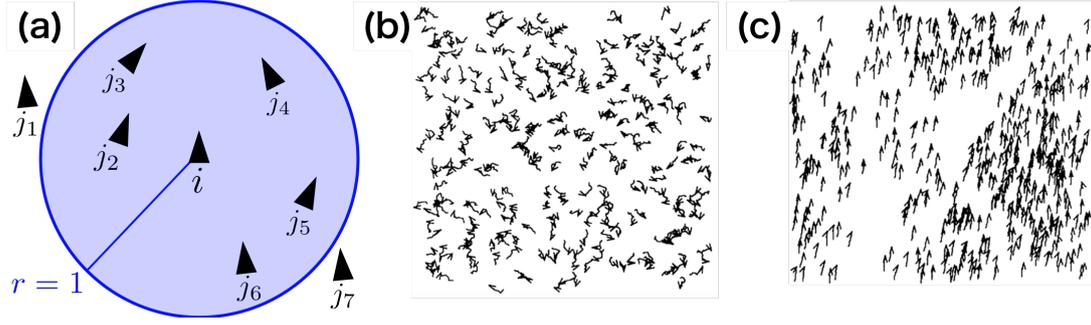


図 10: Vicsek モデルの概要. (a) 式 (11) の概念図. 二等辺三角形は自己駆動粒子を表現しており, 等長辺の交わる頂点が頭に対応する. この状況では $\mathcal{V}_i = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ である. (b) シミュレーションの初期状態. (c) シミュレーションボックスの辺の長さ $L = 5$ における $R = 1$, $v_0 = 0.03$, $\eta = 0.1$ でのスナップショット [17]. 図は [17] より許可を得て転載.

界条件を課している. 時間発展の後に, マクロ極限で秩序変数が一定値となる動的定常状態になり, 図 10(c) のような配向パターンが生じる. 定性的には, 配向パターンは系の密度が高くノイズが小さいときに生じやすい (逆の場合は各粒子の向きがランダムな群れが生じる). 定量的に言えば, 式 (2) の配向秩序変数 P_{2D} は系の密度が高くノイズが小さい場合, $P_{2D} \approx 1$ になる.

1.8.1 Vicsek モデルの発展

この Vicsek モデルは比較的シンプルな定式化がなされているため, 気体分子運動論的考察によって粗視化し, 連続体化することが可能である. すなわち, 気体分子運動論のボルツマン方程式 [28] を, Vicsek モデルにおける粒子の“衝突”による角度変更のプロセスに適用すれば, 状態変数の確率分布の時間発展方程式が得られる. さらに確率密度から速度の期待値を導入することで, 流体力学的方程式を導くこともできる [29]. また, 流体力学的方程式をくりこみ群の手法を用いて解析することで, Vicsek モデルの統計的性質が解析的に定量化される. 例えば, 配向秩序変数は長距離秩序を持つことが示されている [30, 31]. これは, 強磁性体における 2 次元の XY モデルが Mermin-Wagner の定理によって磁化の長距離秩序が禁止されていること [27] と比較すると驚くべきことである. すなわち, 平衡スピン系とは違い, 配向の長距離秩序の発生は, 要素が運動することや詳細釣り合いの関係式が成立していないことからくる非平衡系特有の挙動である.

また, Vicsek モデルは容易に様々な拡張を施すことが可能である. 例えば, Vicsek モデルを 3 次元に拡張した場合でも, 配向パターンが得られている [32]. あるいは, 2 次元の Vicsek モデルに斥力, 引力相互作用を加えることも可能である [33, 34]. 具体的には, 角度の時間発展の式を

$$\theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + \text{Arg} \left(\alpha \sum_{j \in \mathcal{V}_i(t)} e^{i\theta_j(t)} + \beta \sum_{j \in \mathcal{V}_i(t)} f(|\mathbf{r}_{ij}(t)|) e^{i\theta_{ij}(t)} \right) + \Delta\theta_i(t) \quad (12)$$

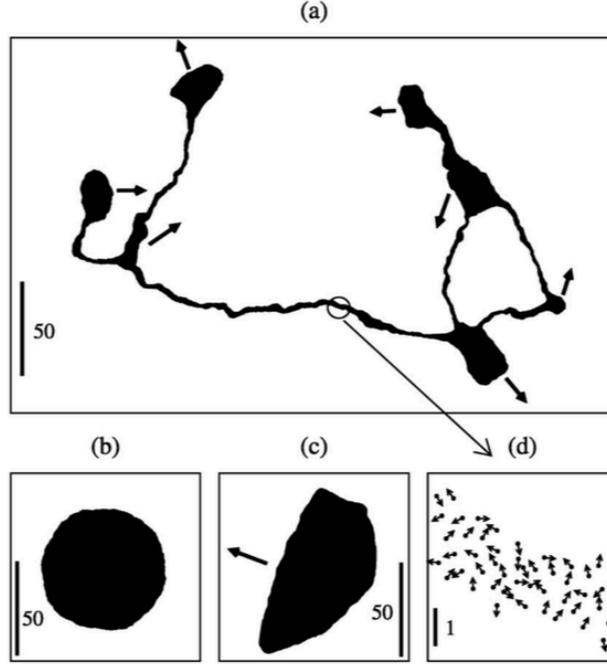


図 11: 2 次元の Vicsek モデルに斥力, 引力相互作用を加えたモデルのシミュレーション [34]. (a) 図 (b, c) に至る途中経過. いくつかの小クラスターに分裂しようとしている. (b) 静止した群れ. (c) 凝集した配向パターン. (d) 図 (a) の線状部分の拡大図. 図は [34] より許可を得て転載.

とする. ここで, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$ で, $\theta_{ij} = \hat{\mathbf{r}}_{ji} \cdot \mathbf{e}_x$ は粒子 i から粒子 j に向かう方向を x 軸から測った角度である. $f(|\mathbf{r}|)$ が相互作用の性質や強度を決める役割を果たし, 次の形をとる.

$$f(|\mathbf{r}|) = \begin{cases} -\infty & [|\mathbf{r}| < r_r], \\ \frac{1}{4} \frac{|\mathbf{r}| - r_e}{r_{a1} - r_e} & [r_r < |\mathbf{r}| < r_{a1}], \\ 1 & [r_{a1} < |\mathbf{r}| < r_{a2}]. \end{cases} \quad (13)$$

つまり, $|\mathbf{r}| < r_e$ では斥力 ($|\mathbf{r}| < r_r$ では強い斥力) が, $r_e < |\mathbf{r}| < r_{a2}$ では引力 ($r_{a1} < |\mathbf{r}| < r_{a2}$ では強い引力) が生じる. ただし, それぞれのパラメタの関係は $r_r < r_e < r_{a1} < r_{a2}$ である. このモデルでは, 凝集し静止した群れや凝集した配向パターン (図 11) などが得られている. 加えて, 図 5(b) で示した微小管の巨大な渦は, Vicsek モデルをネマチックな相互作用に拡張した角度の時間発展方程式に, 固有の角速度 ω_0 を加え,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = v_0 \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \quad (14)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_0 + \frac{\alpha}{|\mathcal{V}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_i(t)} \sin(2(\theta_j - \theta_i)) \quad (15)$$

というように微分方程式化することでも再現できることが知られている [13]. ここで, α はネマチック配向相互作用の強さを表すパラメタである.

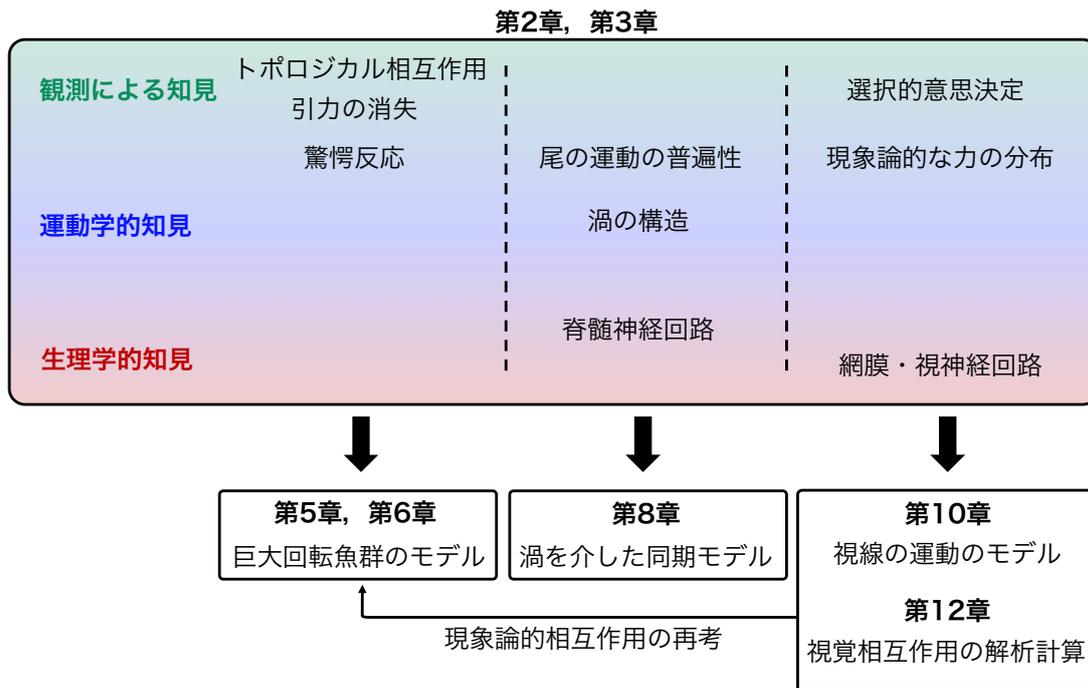


図 12: 本論文の全体像. 上段が本研究で用いた実験による知見. 観測による知見, 運動学知見, 生理学的知見で分類した. 下段が本研究で構築したモデル.

1.9 本研究の目的

ここまでで集団運動, 集団パターンの多様性と, それらを記述するための自己駆動粒子によるモデル化の概念等を見てきた. 上述した自己駆動粒子モデルの代表例である Vicsek モデルは, 配向パターンが配向相互作用のみで出現することを示し, モデルもシンプルであるため解析的計算で得られるものも多い. しかし, 問題点として, 実際の生物がそのような相互作用を示すのか, 直接的に当てはめ理解することが難しいという点が挙げられる.

そこで, より実験との対応を明確にしたモデルの構築が重要になってくる. このために, 本研究では観測データが豊富に蓄積されており, 定常的で多様な集団パターンを示す魚群を集中的に研究する. 本研究の目的は, 魚群のモデルを構築し, それを実験結果と定量的に比較することである. 特に, 回転魚群の発生メカニズムと, 流体相互作用を介した魚群のエネルギーコスト削減戦略のメカニズム, 視覚情報を介した選択的な相互作用による集団運動の発生メカニズムを提示する.

本論文の構成は以下の通りである. 図 12 は本論文の全体像である.

- 第 2 章では, 魚の基本的な遊泳機構に関する実験事実を整理する.
- 第 3 章では, 魚間相互作用の分類と機構について述べる.
- 第 4 章では, 回転パターンを扱った先行モデルと問題点について述べる.
- 第 5 章では, 巨大な回転パターンをもたらすモデルを提示し, その性質を議論するとともに数値シミュレーションの結果を述べる.
- 第 6 章では, 重力場を付加したときの回転パターンの変化等について述べる.

- 第 7 章では、遊泳のモデル化、流体相互作用を介したモデル化の先行研究と問題点について述べる。
- 第 8 章では、逆カルマン渦を介した相互作用のモデル化を提示し、数値シミュレーションの結果を述べる。
- 第 9 章では、現象論的に選択的意思決定を再現したモデルの先行研究と課題について述べる。
- 第 10 章では、視覚神経系に基づいた視線の運動を定式化したモデルを提示し、少数匹での選択的な意思決定と多数匹での集団パターンの両方について数値シミュレーションの結果を述べる。
- 第 11 章では、Vicsek モデルを発展させたボルツマン方程式とその解析手法について述べる。
- 第 12 章では、視覚相互作用を導入したボルツマン方程式の構築と、相転移点の理論的性質の解析を述べる。
- 第 13 章では、本研究の結論を述べる。

2 遊泳の機構

この章では、魚の自己駆動粒子モデルや流体相互作用を考える上での基礎となる魚の遊泳機構について、実験的な知見をまとめる。また、以下では「BL」は体長を意味するものとする。

2.1 魚種と泳法

我々の身の回りには多様な形状の魚がいることから想像できるように、魚の遊泳には様々な泳法が存在する [35]。魚の泳法には大きく分けて2種類が存在し、胴体から尾ヒレにかけての部分動かすBCF(Body-Caudal Fin)型泳法と、尾ヒレ以外のヒレを動かすMPF(Median-Paired Fin)型泳法に分類される [36,37]。さらに、BCF型泳法は5つの型、MPF型泳法は7つの型に分かれる(図13)。ただし、前者は運動部分が連続的に変化し5つの型は重なり合うのに対し、後者は特定のヒレを動かすため運動領域は離散的で7つの型は明確に区別される。以下では、多くの魚種が含まれるBCF型泳法に着目する。(MPF型泳法については図13(b)とそのキャプションを参照。)

2.1.1 BCF型泳法

BCF型泳法の5つの型は以下の通りである(図13(a))。

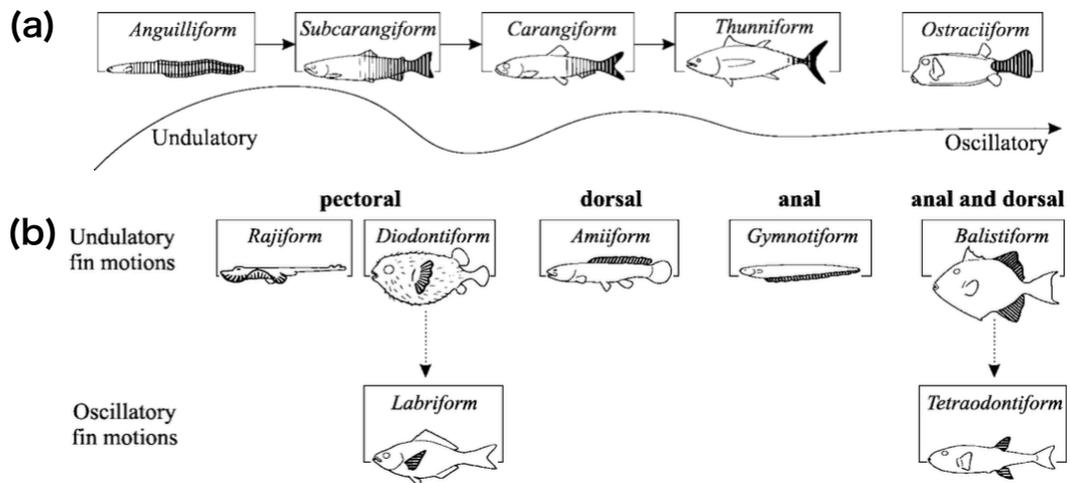


図13: 様々な遊泳型 [37]。斜線部が運動領域である。(a)BCF型泳法。(b)MPF型泳法。MPF型泳法はヒレをうねらせるもの(上段)と振動させるもの(下段)に分かれている。左から、胸ヒレ(pectoral fin)を用いるエイ型(Rajiform)、ハリセンボン型(Diodontiform)、ベラ型(Labriform)、背ヒレ(dorsal fin)を用いるアマア型(Amiiform)、臀ヒレ(anal fin)を用いるナイフフィッシュ型(Gymnotiform)、臀ヒレと背ヒレを用いるカワハギ型(Balistiform)、フグ型(Tetraodontiform)に分類される。(アマアとナイフフィッシュは古代魚に分類される淡水魚である。) 図は [37] © [1999] IEEE より許可を得て転載。

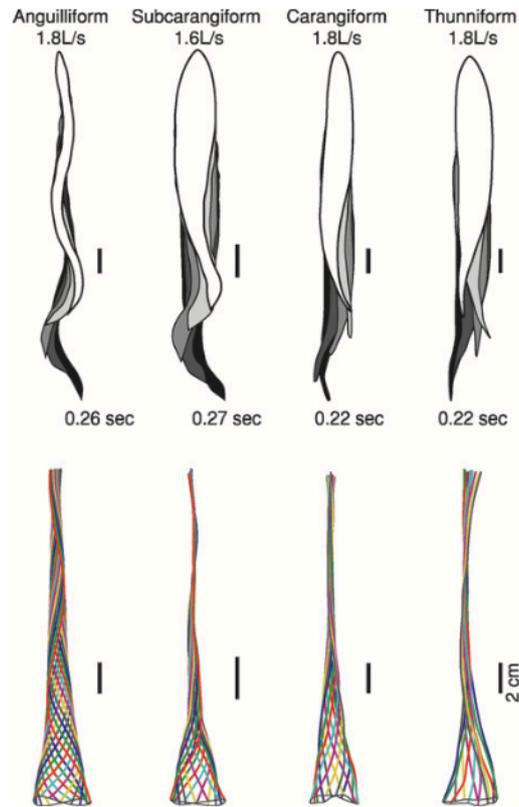


図 14: BCF 型泳法の模式図 [38]. 上段が 1 周期分の時間発展のシルエット, 下段が体の中心線の時間発展を示す. 上段のシルエットの上の単位 [L/s] は 1 体長 (1[L]) を長さの単位としたときの遊泳速度の単位であり, シルエットの下には尾ヒレの運動周期を示す. 左から, ウナギ型泳法のウナギ属, 準アジ型泳法のブルーギル属, アジ型泳法のサバ属, マグロ型泳法のスマ属 (マグロの仲間) を示す. 図は [38] より許可を得て転載.

1. ウナギ型泳法 (Anguilliform): 胴体から尾ヒレにかけての大部分を波動的に運動させる. ウナギに加え, 多くのサメもこの型に分類される.
2. 準アジ型泳法 (Subcarangiform): ウナギ型とマグロ型の間で, ウナギ型により近い泳法がこの型である. 体の中心前部から尾ヒレまでを波動的に動かす. ブルーギルといった淡水魚や, マス, タラなども準アジ型に分類される.
3. アジ型泳法 (Carangiform): ウナギ型とマグロ型の間で, マグロ型により近い泳法がこの型である. 体の中心後部から尾ヒレまでを波動的に動かす. アジやサバ, ニシンなどが分類される.
4. マグロ型泳法 (Thunniform): 尾ヒレの近傍を波動的に運動させる. マグロやカジキに見られる型である.
5. ハコフグ型泳法 (Ostraciiform): 尾ヒレを振動させる泳法. ハコフグなどが分類される.

特に準アジ型, アジ型, マグロ型泳法に多数の魚種が含まれる. 図 14 にハコフグ型泳法以外の BCF 型泳法の時間発展を示す [38].

2.2 流体力学的指標

この節と次の節 (2.3 節) では、魚一般の遊泳に関する普遍的な性質について述べる。水中で尾ヒレを動かして遊泳する魚を物体とみなしたとき、流体中を振動する物体とみなすことができる。一般に流体中の振動物体に関する流体力学的指標 (無次元量) は 2 つ存在する [39].

1 つは、流体中の慣性力の強さと粘性力の強さの比であるレイノルズ数

$$\text{Re} = \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad (16)$$

である。ここで、 ρ は流体の密度、 η は流体の粘性係数、 $\nu = \eta / \rho$ は動粘性係数、 U は代表的な流速、 L は物体の代表的な長さである。つまり、粘性流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式において、 $\rho U^2 / L$ は慣性項 $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ のオーダー評価に対応し、 $\eta U / L^2$ は粘性項 $\eta \Delta \mathbf{v}$ のオーダー評価に対応する。

もう 1 つは、振動による物体の速度と流速の比であるストローハル数

$$\text{St} = \frac{2Af}{U} \quad (17)$$

である。ここで、 A は振動の振幅、 f は振動の振動数である。 $2A$ としているのは、魚の文脈では尾ヒレの横方向の変位の peak-to-peak の振幅 ($2A$) を振動の代表長さとして使用することが多いからである。

2.2.1 レイノルズ数とストローハル数の関係

実際の魚でレイノルズ数、ストローハル数がどのような値をとるのか見る。 Re と St の関係を見出すために、流体中における推力 (推進するための力) と抗力 (推進を妨げる力) のオーダー評価を行う [40]. まず、推力 F_T を求める。魚の代表長さを L とすると、魚の運動により動く流体の質量は $\sim \rho L^3$ で評価できる。また、尾ヒレの加速度は $\sim Af^2$ のオーダーであるため、流体の受ける力は $\rho L^3 Af^2$ でスケールされる。ただし、その力の内、魚の推進方向の成分を得るには尾ヒレのなす角度を θ としたとき、 $\sin \theta \sim A/L$ をかける必要がある。従って、推力は $F_T \sim \rho L^2 A^2 f^2$ のオーダー評価になる。

一方で、抗力 F_D の方は、その生物の周りの流れが層流的か乱流的かで評価が変わる。図 15(a) に示すように、魚においてレイノルズ数は一般に $\text{Re} \sim \mathcal{O}(10^4)$ - $\mathcal{O}(10^5)$ と言われており、これは十分に乱れた乱流領域の流れをもたらす。この場合、魚の受ける抵抗はニュートン抵抗となり、推進に垂直な面の体の射影面積と代表速度の 2 乗に比例する抗力が生じる [39]. つまり、 $F_D \sim \rho U^2 L^2$ である。 F_D がこの形をとるのは、単位時間当たり質量 ρUL^2 の流体粒子が体にぶつかり、その流体粒子の単位時間当たりの運動量変化が $\rho U^2 L^2$ であることから定性的に説明がつく。

以上より遊泳時、平均的には推力と抗力が釣り合っているとして、 $\rho L^2 A^2 f^2 \sim \rho U^2 L^2$, $\therefore UL/\nu \sim AfL/\nu$ を得る、あとは $UL/\nu = \text{Re}$, $AfL/\nu = \text{ReSt}/2$ であることを考えれば、結局

$$\text{ReSt} \sim \text{Re} \quad (18)$$

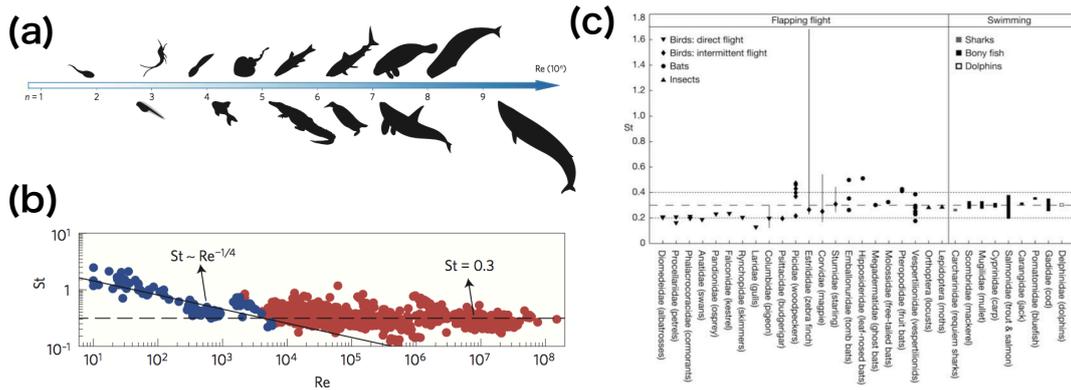


図 15: 様々な生物のレイノルズ数 Re , ストローハル数 St . (a) 水生生物の Re . (b) 水生生物の Re と St の関係 [40]. (c) 鳥, コウモリ, 昆虫, 魚, イルカの St [42]. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

となる。つまり、レイノルズ数の関数と考えた場合、ストローハル数はレイノルズ数に依存しないことを意味する。ちなみに、層流と乱流の境目を決める臨界レイノルズ数はおおよそ $Re \sim \mathcal{O}(10^3)$ のオーダーである。層流領域での抵抗は層流境界層による摩擦抵抗が主で、境界層理論 (ブラジウス層流境界層) による計算により $F_D \sim \rho \nu^{1/2} U^{3/2} L^{3/2}$ となっている [39]。従って、推力と抗力の釣り合いの関係から、層流領域では同様の計算により

$$St(Re) = Re^{-1/4} \quad (19)$$

で、ストローハル数はレイノルズ数の $-1/4$ 乗に依存する。

様々な水生生物においてレイノルズ数とストローハル数の関係を調べたのが図 15(b) であり、実際に式 (18, 19) が適切なレイノルズ数領域で成立していることがわかる。特に重要な事実は、式 (18) の定数はどの魚種でも $St \approx 0.3$ に近い値をとるという普遍性が存在することである [40, 41]。さらに、驚くべきことに鳥や昆虫までもが $St \approx 0.3$ という値をとっているという非自明な事実が知られている (図 15(c))。この普遍性は流体力学的相似からくるものと考えられる [42]。

2.3 遊泳速度と尾運動の関係

魚の尾ヒレの振動運動は物理的には振幅 A と振動数 f で特徴付けることができる。このとき、遊泳速度 U と振幅, 振動数の間にどのような関係があるのかが気になるところである。式 (18) の導出過程を振り返れば、 $U \sim Af$ が主張されるはずであり、(低速領域では) 遊泳速度は振幅と振動数の両方に比例するように見えるという主張もなされてきた [43]。しかし、多数の実験によれば、様々な魚種で振幅は $A \sim 0.1[BL]$ という一定値を取るため、実際には振幅は定数として扱い

$$U \sim f \quad (20)$$

という主張がなされている [44–48]。つまり、魚は遊泳速度を変えるとき、振幅は変更することなく振動数のみを調整して遊泳する。図 16 に様々な魚種で普遍的に式 (20) の線形関係が成立していることを示す。

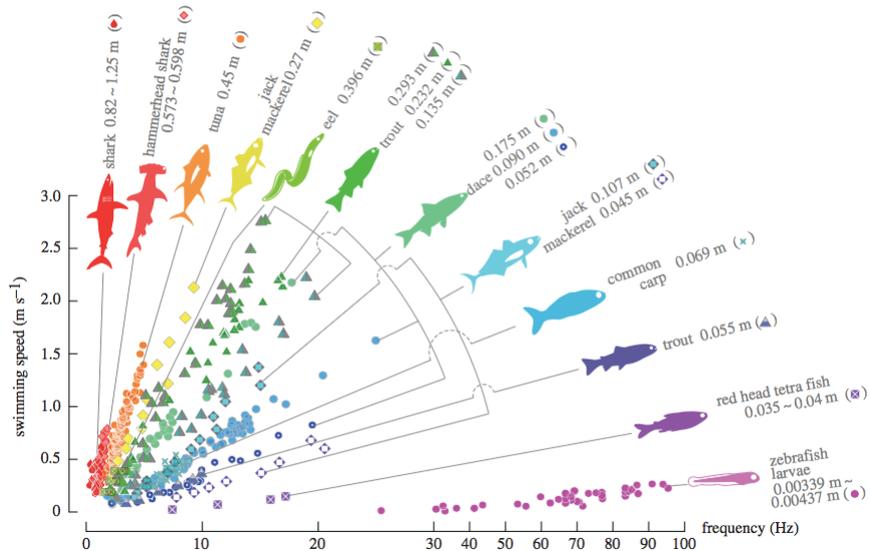


図 16: 様々な魚種における遊泳速度 (縦軸) と振動数 (横軸) の線形関係 [48]. 図は [48] より許可を得て転載.

このように振動数のみを調整する生物学的理由としては、遊泳のエネルギーコストを最適化した結果とされている [48]. エネルギーコストの定量的指標としては、フルード効率 $F_T U/P$ や、輸送コスト P/MU が用いられる. ここで、 P は魚のなす仕事率、 M は魚の質量であり、どちらもどれだけ効率よく推進できているかを評価している. これらを $A-f$ 平面上で最適化 (極値を探索) すると、振幅をほとんど一定に保ったまま最適化されるということが示されている [48].

また、観測データから得られた U と f の線形関係式を外挿したとき、実験によっては $f=0$ において $U < 0$ になるという、「負の切片」の問題も知られている [44-46]. これは、振動数がゼロに近い場合、遊泳時に通常では体に張り付いていた胸ビレなどが体から浮き上がってくるためなどと説明するものもある [49]. つまり、流体力学的に抵抗領域が増大するため、有限の振動数で遊泳速度がゼロになってしまうと説明される. 一方で、切片がゼロになるように (つまり $f=0$ で $U=0$ となるように) フィッティング可能という実験報告もあり [50], 切片の問題に関してはある程度、測定の揺らぎがあることがうかがえる.

2.4 遊泳速度と持続時間

ここからの節で、BCF 型泳法 (特に準アジ型, アジ型, マグロ型泳法) をとる魚について、どのようにして泳いでいるのか、そのメカニズムなどを生理学的な視点から提示する.

まずは、遊泳の種類について速度と持続時間の観点からの分類を提示する. 遊泳には 3 つのタイプが存在する [51, 52].

1. 定常遊泳: 遊泳速度は 1-3[BL/s] 程度で、持続時間は半永久的に可能である.
2. 準定常遊泳: 遊泳速度は 3-5[BL/s] 程度で、持続時間は 1-2 時間程度まで可能である.

3. fast-start(瞬発遊泳)：遊泳速度は 7-11[BL/s] 程度で，持続時間は 0.1 秒程度と短時間である。

図 17 には，例としてサケとニジマスの持続時間と遊泳速度の関係を示す．魚は基本的に定常遊泳を行う．準定常遊泳は，周囲の流体の流れの急峻さや他の魚との相互作用に応じて使用する．fast-start は，逃避行動や捕食行動など瞬発的運動で見られる。

2.4.1 赤筋と白筋

この 3 つの遊泳タイプについて，生理学的な説明を加える．遊泳速度を変えるには筋肉を動かす速さを変更すれば良い．魚の筋肉は筋繊維は細いが持続的な力が発揮可能な赤筋と，太い筋繊維によって瞬発的な力をもたらすが疲労しやすい白筋から構成される(図 18) [53]．それらの割合としては，頭から尾に向かうほど赤筋が多く分布している(図 18(b))．筋肉の性質から予想されるように，赤筋は定常遊泳，白筋は fast-start で積極的に使用され，準定常遊泳では赤筋と白筋の使用が重なり合う [54-57]．つまり，速度上昇に伴って赤筋から白筋へと使用する筋肉が変化していく(図 18(c))．

この 2 種類の筋肉は運動神経と結びついている．運動神経には 4 種類存在し，1 次運動神経と遊泳速度に応じて使い分けられる 3 種類の 2 次運動神経である [58]．1 次運動神経は fast-start で白筋を運動させるために使用され，低速の 2 次運動神経は主に赤筋を運動させ定常遊泳をもたらす，中速，高速の 2 次運動神経は準定常遊泳を行うために赤筋と白筋の混合筋を運動させる(図 18(d)) [59]．

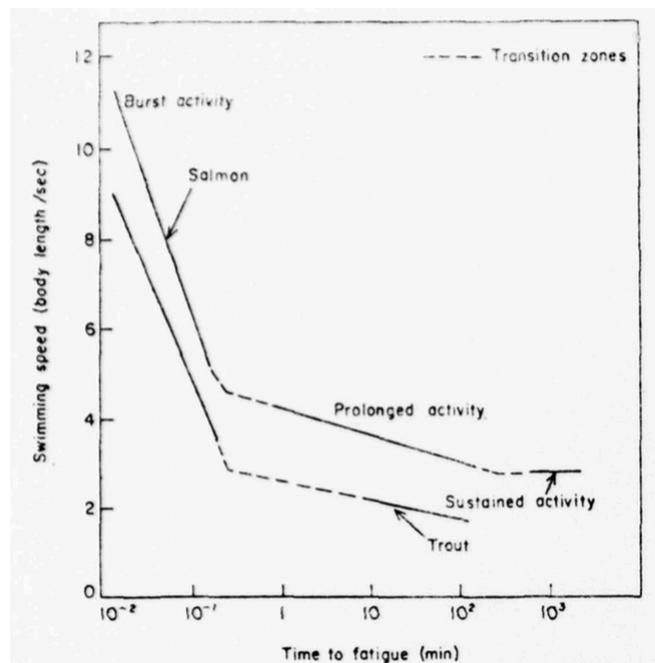


図 17: サケ (Salmon) とニジマス (Trout) の持続時間と遊泳速度の関係 [51]．Sustained activity が定常遊泳，Prolonged activity が準定常遊泳，Burst activity が fast-start に対応する．図は [51] より許可を得て転載．

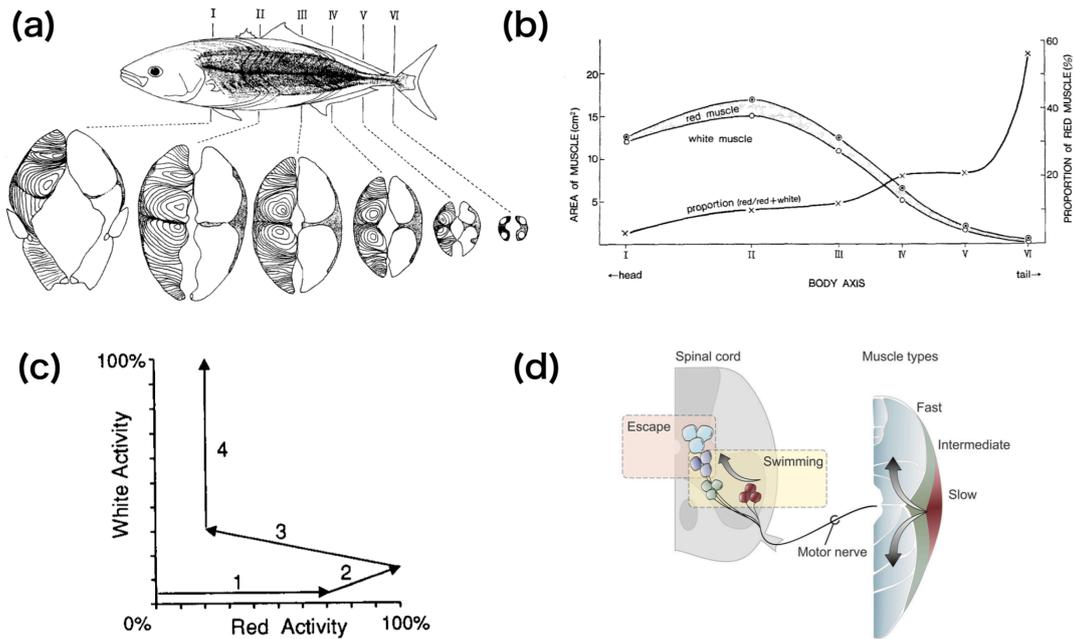


図 18: 魚の筋肉と運動神経. (a, b) ブリの赤筋と白筋 [53]. (a) 体の各部分の断面図. 各断面の塗りつぶし部分が赤筋, 非塗りつぶし部分が白筋に対応. 各断面において, 右側の断面に, 筋肉の層を表す線を加えたものが左側の断面である. (b) 各断面における赤筋と白筋の面積と, 赤筋の割合. (c) 速度上昇に伴う使用筋肉の変化 [56]. (d) 各運動神経の役割の模式図 [59]. 水色が 1 次運動神経, 青, 緑, 赤がそれぞれ高速, 中速, 低速の 2 次運動神経である. 筋肉の断面図は青が白筋, 緑が白筋と赤筋の混合筋 (ピンク筋), 赤が赤筋である. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

2.5 定常遊泳, fast-start の神経回路

運動神経を支配する中枢神経系のさらなる詳細について述べていく.

2.5.1 定常遊泳の神経回路

ここで, 人間の歩行について考えてみる. 通常, 人間が歩行をする際「右足を出したら左足を出す」などと, その都度考えながら歩行することはない. このように, 歩行について思考せずに済んでいるのは, 脊髄にリズム的な電気信号を安定して生み出す, 中枢パターン生成器 (central pattern generator, CPG) と呼ばれる神経回路があるからである [60].

魚の場合, 歩行に対応するものは (準) 定常遊泳である. 上述の 3 種類の 2 次運動神経は, 対応する 3 種類の CPG 回路に接続されており, 泳ぎたい速度に応じて使用する CPG 回路を決定している [61]. CPG の構造としては, 脊髄の左半分と右半分に対称的に 1 セットの回路が組み込まれており, 片側の回路が電気信号を出力 (発火, 興奮) している時は, もう片側の回路が抑制される仕組みになっている [60]. このようにして, 左右交互に発火が生じるようになっている.

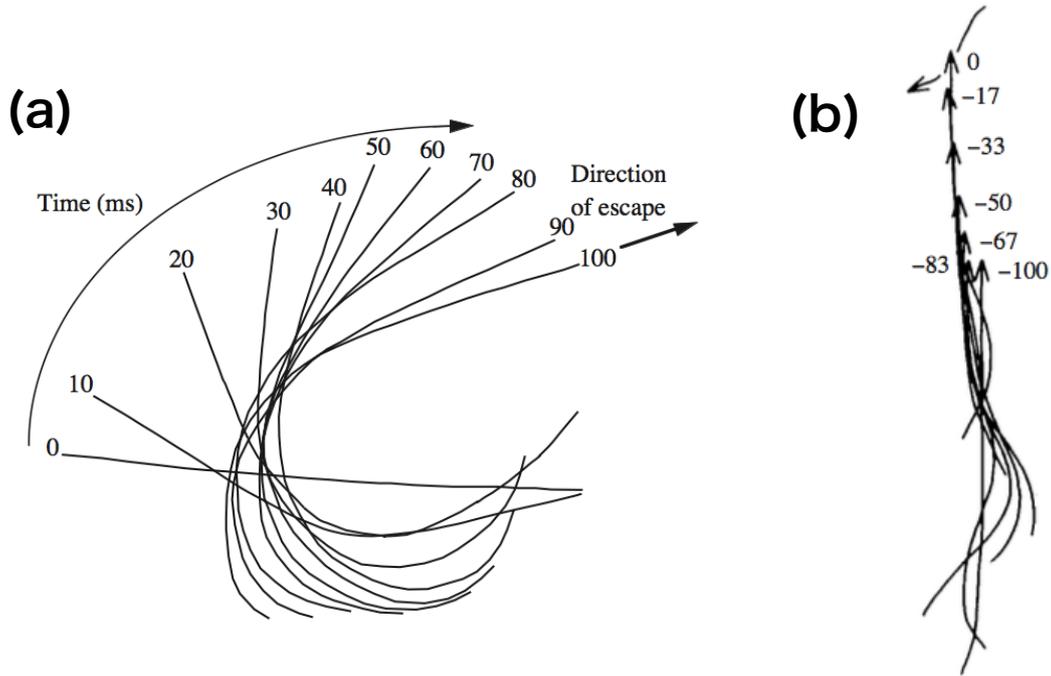


図 19: fast-start 中の時間発展の様子. 線は体の中心線を表し, 数字は経過時間 [ms] である. (a) コイの逃避行動 (C 型 fast-start) [65]. (b) パイク (大型の淡水魚) がファットヘッドミノー (コイ科の淡水魚) を捕食する様子 (S 型 fast-start) [64]. 最上部の矢線が 0[ms]でのファットヘッドミノーに対応する. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

2.5.2 fast-start の神経回路と運動様式

fast-start については, マウトナー細胞 (Mauthner-cell, M-cell) と呼ばれる神経細胞が 1 次運動神経を支配している [55,62]. M-cell により誘起された 1 次運動神経の興奮持続時間は 0.1[s] 程度と短時間である [63,64].

このような仕組みにより生じる fast-start には 2 つの型が存在する. 主に捕食者からの逃避に用いられる C 型と, 捕食者が獲物を狙う時に使用する S 型である [64,65]. この名前の由来は fast-start 中の体の形からくる (図 19). 例えば, 向かって来る捕食者とは反対方向に逃避しようとする時, 体を「C」の字に曲げる必要がある (図 19(a)). 本論文では, 特に C 型 fast-start の群れでの役割について, 次章で詳しく扱っていくこととする.

2.6 逆カルマン渦の発生

この章の最後に, 魚が遊泳する際に発生させる逆カルマン渦について述べる [47,66–68]. まず, 何が「逆」であるかを知るために, 通常のカルマン渦 [39] との違いについて示す (図 20). カルマン渦とは適切なレイノルズ数の流れが物体を通過するとき, 物体の後方にできる渦場のことである. 例えば, 一様流中に置かれた円柱の場合, おおよそ $Re \sim \mathcal{O}(10^1) - \mathcal{O}(10^2)$ で出現し始める. 定性的には, 物体の後ろ側では流れの方向に圧力が高くなるため, 粘性流体の滑りなし条件から境界層付近の流れが小さくなっていること

より、圧力勾配に逆らえず、渦状の逆流が生じることからくる。ここで重要なことは、カルマン渦列の作る流れ場が平均して物体の方に向かって流れているということである。つまり、流体は物体の方に力を受けているので、その反作用として物体には抗力が生じている。

一方で、逆カルマン渦はカルマン渦の渦の回転方向を反転させたという点で「逆」にあたる(図 20)。つまり、逆カルマン渦列の作る流れ場は平均して魚の運動の向きとは逆向きに流れている。従って、同様の作用反作用の考察により、逆カルマン渦は魚が推力を得ている証拠とも主張できる。また、逆カルマン渦が生成される原因は次のように説明できる。図 20 は魚が尾ヒレを体軸から左側にふり、再び体軸方向に戻そうとしている様子である。このとき、魚は前進しつつ尾ヒレを振っているので、体軸から左側にふる時に作られた左方向への流れと、再び体軸方向に戻す時に生じる右方向への流れが組み合わさり、左側には時計回りの渦ができる。右側に反時計回りの渦ができる過程も同様である。

2.6.1 逆カルマン渦の構造

逆カルマン渦の 3 次元的な構造について示す。図 21(a) のように、実際の魚の尾ヒレの後方で観測された逆カルマン渦列は渦輪が連結したような構造をとっている [66]。この渦輪の輪郭は、渦場のコアの境界を表現している。渦場のコアとは、図 21(b) 中央の渦場の速度において、速度のピーク位置より内側の部分 (図中ではおおよそ $-1[\text{cm}]$ から $1[\text{cm}]$ の領域) のことである [67]。このような渦中心で速度がゼロになるコアを持つプロファイルは、竜巻など実在流体中の 3 次元渦構造で一般的にみられるものであり、ランキン渦モデルと呼ばれる渦場で近似的に表現される [69]。

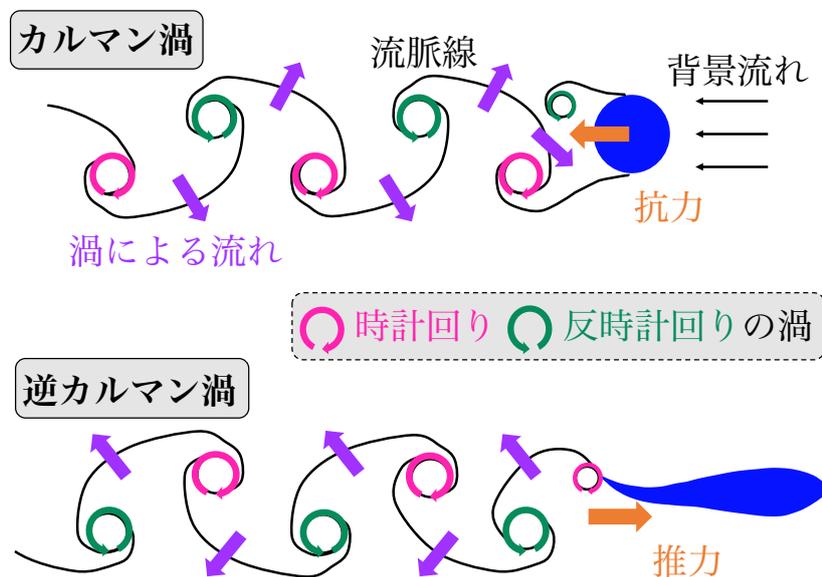


図 20: カルマン渦 (円柱の後流) と逆カルマン渦 (魚の遊泳による渦場) の違い。3 次元中の渦列の 2 次元断面を見ている。流脈線 (黒線) は、ある始点からインクを流したときに、そのインクが辿る線を表す。始点は円柱では両脇の 2 点、魚では尾の先端に対応する。ピンクと緑の矢印はそれぞれ時計回り、反時計回りの渦を表す。紫の矢印は渦による流れを表し、オレンジの矢印は抗力・推力を表す。

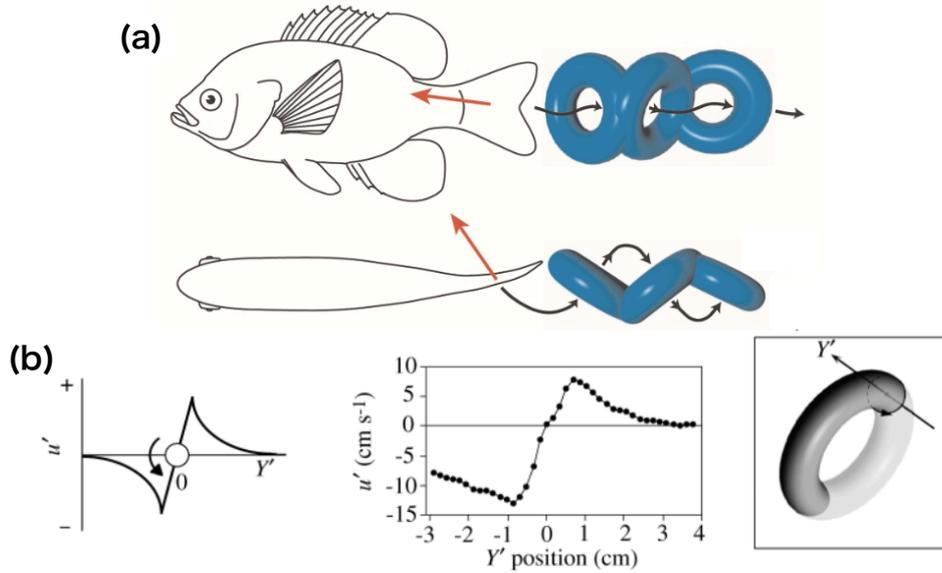


図 21: 逆カルマン渦の構造. (a) 尾ヒレの後方にできた逆カルマン渦輪列 [66]. オレンジの矢印が尾ヒレの運動方向. 黒の矢印が渦場を作る流れ. (b) 渦輪を横切る軸 (Y' 軸) で見た渦構造 [67]. 左から, ランキン渦モデルでの速度 u' の模式図, 尾ヒレ後方の渦輪での速度の実測値, 渦輪と Y' 軸の関係である. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

ランキン渦モデルとは, 渦度 (速度 \mathbf{u} の回転, $\nabla \times \mathbf{u}$) が一定のコアと, 渦度がゼロの外側部分からなる結合渦モデルである. 具体的な速度場 \mathbf{u} は, 渦中心を原点とする座標系 (x, y) でみたとき,

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r_R^2}(-y, x) & [r < r_R], \\ \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(-y, x) & [r > r_R] \end{cases} \quad (21)$$

と表される (図 21(b) 左). ここで, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ は原点からの距離, r_R はコアの半径である. コアより外側の領域では, いわゆるポテンシャル流の作る渦場と完全に一致している. (あるいは, 直線電流の作る磁場と同じ関数形とも言える.) 実際, この \mathbf{u} の渦度の大きさは

$$|\nabla \times \mathbf{u}| = \begin{cases} \frac{\Gamma}{\pi r_R^2} & [r < r_R], \\ 0 & [r > r_R] \end{cases} \quad (22)$$

であり, ランキン渦モデルの定義通りである. 加えて, 渦度の面積分である循環 $\int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}$ は, 積分領域を渦のコア全体 ($r < r_R$) としたときに Γ になるように設定されている.

3 魚間相互作用の分類

この章では、魚の集団運動を考える上での要となる個体間相互作用 (魚間相互作用) について、実験的な知見をまとめる。

3.1 魚間相互作用の成因

魚間相互作用は、神経系を用いる能動的なものと、神経系を介さず直接力を及ぼすことによる受動的なものに大別される。能動的相互作用を支えるのは、視覚情報 [70, 71] や、流体の流れの情報 [70, 72–74] である (図 22(a))。他の生物にも共通するように、視覚情報は光の明暗として目で受け取り、神経系での処理を介して自身の行動に反映する。一般に視覚情報は他の魚の相対位置を特定するのに使用され [70]、網膜に移るその像の面積の占める割合に応じて斥力や引力が働くと考えられている [71]。詳細については 3.4 節で述べる。

一方、流れの情報には、周囲の環境からの流れ [72] や、他の魚の速度や運動の向きといった情報が含まれる [70]。これらの情報は、魚特有の突起状の感丘 (cupula) と呼ばれる神経器官で読み取られる [73]。高度な流れ場の読み取りを実現するため、感丘には表皮感丘と管器感丘の 2 種類の神経器官が存在する (図 22(b))。表皮感丘は図 22(c) のように体の表面から生えており、この突起が流れに応じて傾くようになっている。この傾きから、周囲の流体の速度がわかり表皮感丘は速度検出器として働く。他方、管器感丘は図 22(d) のように表皮下の側線と呼ばれる管の中に入っている。側線にはおおよそ等間隔に穴が空いており、その穴同士の圧力勾配の差から管内に流れが生じるようになっている。圧力勾配がナビエ・ストークス方程式から流体の加速度に関係していることを考えれば、管器感丘の傾きは流体の加速度を反映していることになる。感丘で得た情報は、斥力や配向相互作用に使われるとされているが [70]、これらの情報をどのように行動に反映させているかについては不明な点が多い [74]。

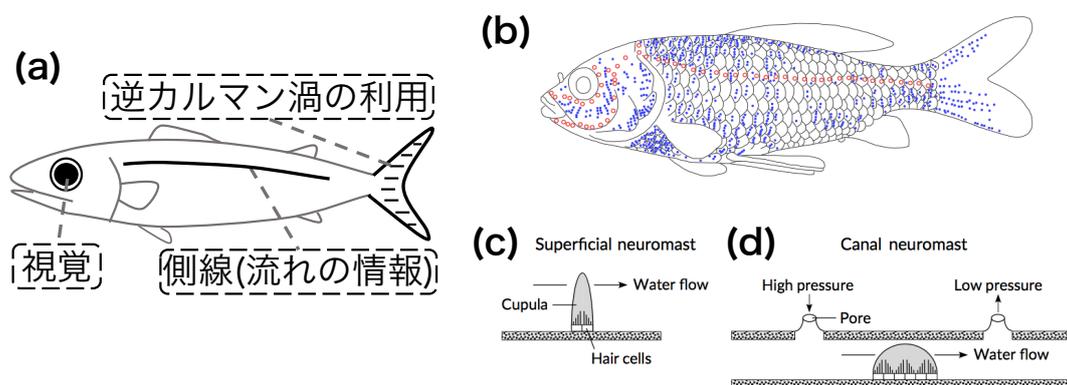


図 22: 魚間相互作用の要素. (a) 魚体と相互作用反応部位の模式図. (b, c, d) 側線の詳細 [73]. (b) 金魚の表皮感丘 (superficial neuromast, 青の点) と管器感丘 (canal neuromast, 赤の点) の分布. (c) 表皮感丘の模式図. (d) 管器感丘の模式図. 図は [73] より許可を得て転載.

また，受動的相互作用の例としては，逆カルマン渦による流れ場を利用した相互作用 (図 22(a)) [75] があり，詳しくは 3.3 節で述べる。

3.2 現象論的相互作用の実験観測

能動的相互作用について原理的なレベルで理解を進めるためには，神経系の複雑さを考慮する必要がある．そこで，まず，魚間相互作用に対する先行実験としては現象論的なアプローチがなされてきた．それらの実験についてまとめる．

3.2.1 相互作用の性質と範囲

現象論的に魚間にどのような種類の相互作用が働いているかを見る．群れとして凝集するために引力は必須であり，衝突回避のために斥力も存在すると考えられる．実際，ゴールドデンシャイナー [76] やカダヤシ [77] といった準 2 次元系で実験可能な淡水魚でこれら斥力・引力の存在が確認されている．図 23 は対象の魚 (focal fish) の加速度を測定することで，運動方程式から力を求めたときのその空間分布である．2 匹の場合，斥力と引力は魚間距離約 $1.5[BL]$ を境として切り替わり，平衡距離が存在することがわかる (図 23(b), (c))．一方で，30 匹の群れにいる場合は， $1.5[BL]$ 以内の斥力はそのままだに，引力のみが顕

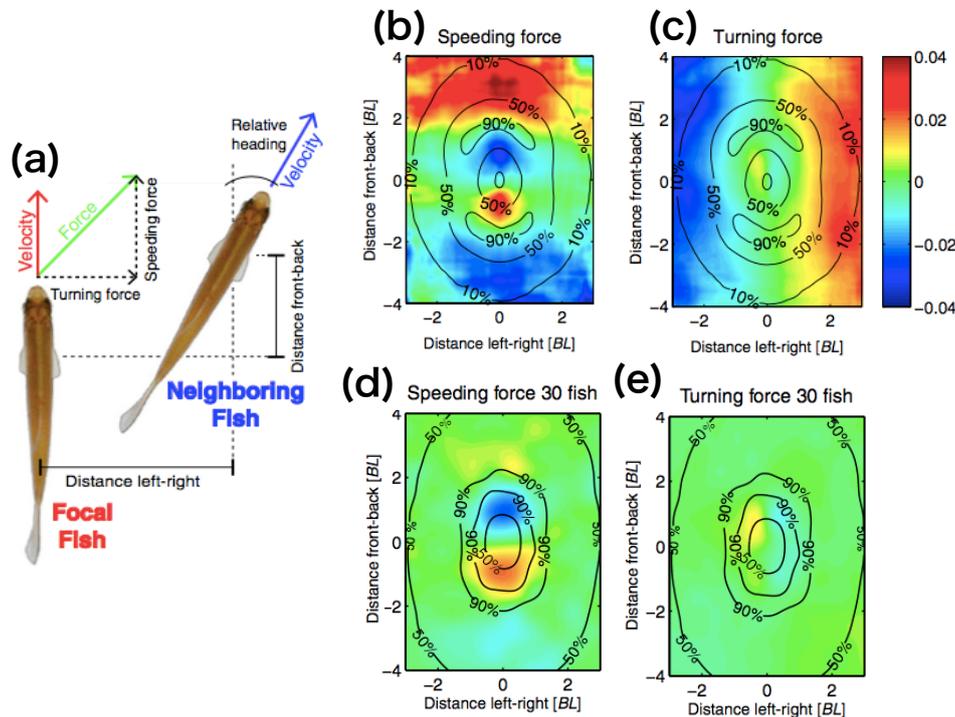


図 23: ゴールデンシャイナーにおける斥力と引力の分布 [76]. (a)2 匹の場合の測定量の模式図. (b, c)2 匹の場合, (d, e)30 匹の場合の力の分布. (b) と (d) が前後方向の力 (speeding force) の分布. (c) と (e) が左右方向の力 (turning force) の分布. ただし，実際には力ではなく加速度を測定しており，カラーバーは画像ピクセルをもとに計測した加速度を表す．図中の数字 (パーセント) は周囲の魚の存在確率を表す．図は [76] より許可を得て転載．

著に小さくなっている (図 23(d), (e)). これは群れの中では, 周囲の魚によって視覚情報が遮られ, 流体の情報は乱されるため, ごく近傍の魚との位置調整にのみ専念することを意味している [76].

また, 上の実験 [76, 77] では過小評価されていたが, 最近の実験ではラミーノーズテトラ (淡水魚) において, 向きを揃える配向相互作用が主に斥力領域から引力が最大となる領域に渡って働いていることがわかっている [78]. あるいは, ゼブラフィッシュの実験により, 集団の中で社会性を学習することにより, 受精後 6 週間で配向相互作用が備わることもわかっている [79]. 従って, 魚間には斥力, 配向相互作用と, 場合により引力が働いていると言える.

3.2.2 トポロジカル相互作用

このように, 現象論的見方では, 斥力や引力といった相互作用の性質は, 魚間の距離に依存して決まることがわかった. 従って, 魚は引力相互作用が届く範囲内にいる全ての相手と相互作用を行うと考えることができる. このような相互作用方法をメトリック相互作用と呼ぶ [80].

しかし, 少なくとも鳥 [80–82] や魚 [83] においては, メトリック相互作用を採用していないと実験的に主張されている. 初めてこの主張がなされたのは, 歴史的にはムクドリの群れにおいてである [80–82]. 各個体の速度と, 近接する個体との相対位置ベクトルとの相関を調べたところ, 相関の強さは距離よりも, むしろ自分から見て相手が何次近接に当たるか (何番目に近いか) で決まっていることがわかった. また, 各個体が相互作用できる相手の数に上限があり, 6~7 次近接までの個体と相互作用されることが示された (図 24(a)). このように, 2 体間の距離ではなく全ての個体の相対的な位置関係にもとづく相互作用の相手の決定方法をトポロジカル相互作用と呼ぶ. (ここでの「トポロジカル」は位相幾何学の意味ではなく, 相対的な位置関係にもとづくという程度の意味である.) 上限付きトポロジカル相互作用を採用しているという事実は, 相互作用の相手の数が数十以上にもなり得るメトリック相互作用では脳が情報処理をしきれないという点からも理解することがで

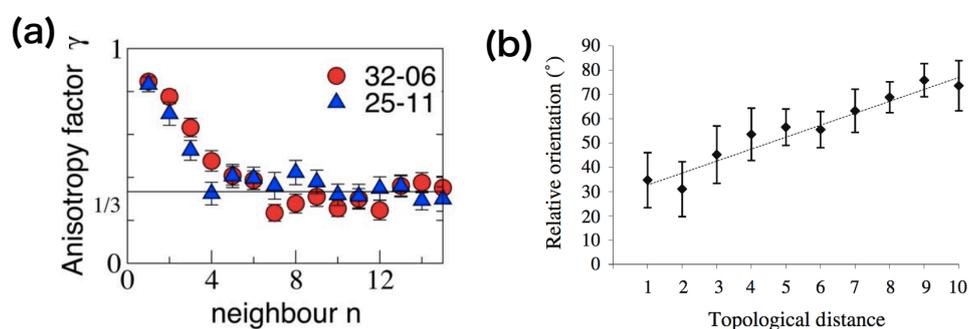


図 24: トポロジカル相互作用の検証. (a) ムクドリの群れにおける運動方向 (本文参照) の相関関数 [80]. γ は相対位置を元にした n 次近接の位置の異方性を表す関数で, 等方的に分布している場合は $\gamma = 1/3$ に収束する. (32-06 等は群れのサンプル番号である.) (b) イトヨの群れにおいて, 魚型ロボットを方向転換させた 1 秒後のロボットの配向と n 次近接魚の配向とのなす角度 [83]. 図はそれぞれの文献より許可を得て転載.

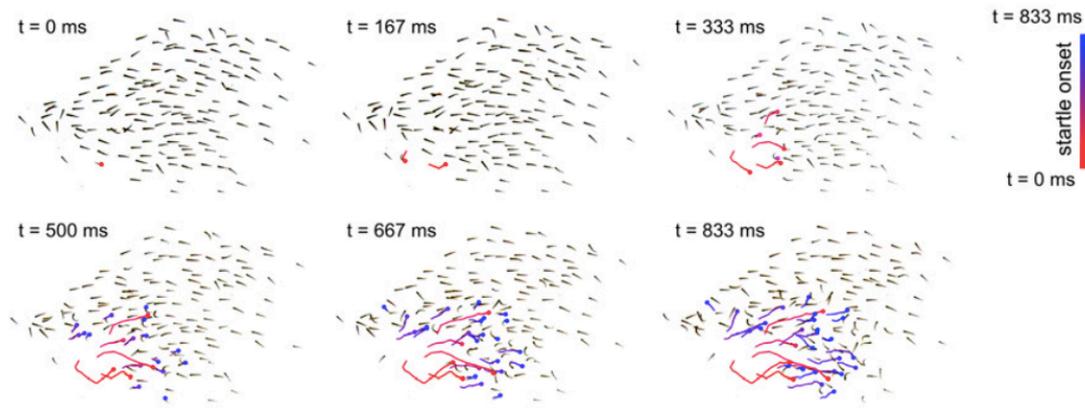


図 25: ゴールデンシャイナーの群れの境界付近からの fast-start による方向転換の伝播 [5]. 図は [5] より許可を得て転載.

きる.

魚の場合は、イトヨ (海水魚) の群れに魚型ロボットを 1 つ潜入させ、ロボットによる刺激と配向相関の関係を調べた実験から、トポロジカル相互作用を採用していることがわかっている (図 24(b)) [83]. ただし、何次近接までと相互作用するかは測定方法の違いもあってか未だに決着は付いていない. 例えば、カダヤシの実験では 1 次近接と主張しており [77], ギンユゴイ (海水魚) の系では推定手法の違いにより 3 次近接, あるいは 6~8 次近接と見積もられている [84]. 魚の群れは鳥の群れに比べ、密度 (体積比) が大きいため、視覚の遮蔽効果によって相互作用相手の数の上限は鳥より少なくなると考えられる.

3.2.3 fast-start による配向の高速伝播

2.5.2 節で述べた fast-start (C-start) は、自身と捕食者の 1 対 1 の状況では単純な逃避行動に過ぎないが、群れの中では fast-start が重要な役割を果たしていることがわかっている [85–87]. 1 匹の魚が fast-start を行った時、急激な方向転換に気づいた近傍の魚は同様に方向転換する [85]. この方向転換が (おおよそ $10[\text{BL}/\text{s}]$ の速さで) 次々と伝播していき、捕食者に対して群れ全体が柔軟に反応できるようになっている [86, 87].

特に、始めに fast-start を行う魚 (開始者) は群れの境界付近にすることが知られている (図 25) [5]. もともと fast-start が捕食者を視覚で捉えて実行されているであろうということから、図 25 のように捕食者がいない状況でも、群れの境界近傍にいる魚が開始者になりやすいことが本能的にそなわっていると考えられている. これは、魚にとって視界がひらけていることは、逃避行動に繋がりやすいというように解釈できる.

3.3 逆カルマン渦による受動流体相互作用

3.3.1 逆カルマン渦を用いた流体抵抗削減の古典的考察

上述の能動的な相互作用に対し、逆カルマン渦を用いた純粋な流体効果による受動的な相互作用について述べる. 群れの中で魚は逆カルマン渦を何らかの形で利用していると、古くから考えられてきた [88, 89]. 渡り鳥が V 字形の編隊を組むことで群れ全体の消費エネルギーを抑えることができるように [90], 魚の場合もある決まった編隊を組むことで逆

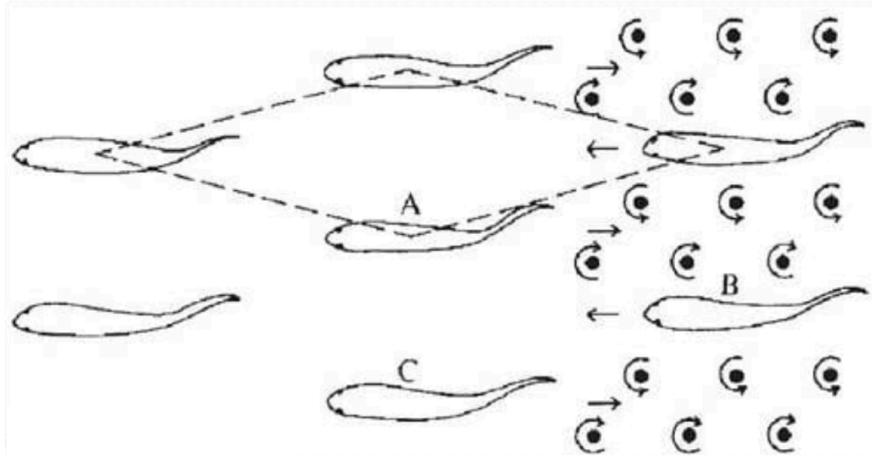


図 26: ひし形編隊の模式図 [89]. 図は [89] より許可を得て転載.

カルマン渦の恩恵を得られると考えられてきた. その編隊の古典的候補として挙げられるのが Weihs(1973) によるひし形編隊である (図 26) [89]. 例えば, 図 26 において魚 A, C が作る逆カルマン渦によって前方に向かう流れが生じるため, 魚 B はその流れに乗れば消費エネルギーが抑えられると予想される.

しかし, 様々な魚種での実験により, 一定の編隊を組んでいるという結果は否定されている [91,92]. むしろ実験は空間的な位置関係よりも, 互いの尾ヒレの運動タイミングを調整していることを示している [93,94]. つまり, 逆カルマン渦の恩恵は, 互いの位置よりも尾ヒレの運動の調整によって得られることを示唆している. 実際, 最近の実験によってこの事実がより明白になった [75]. 以下では, 重要なこの実験について触れる.

3.3.2 逆カルマン渦を用いたエネルギー削減策略

実験の主張は, 「先導魚の作る逆カルマン渦の流れ場に, 後続魚は尾ヒレの運動 (以下, 尾運動) を同期させると遊泳エネルギー効率が良い」ということである. まず, 同期という概念を導入するために, 尾運動の解析方法について述べる. 図 27(a) は速さ u の背景流れ

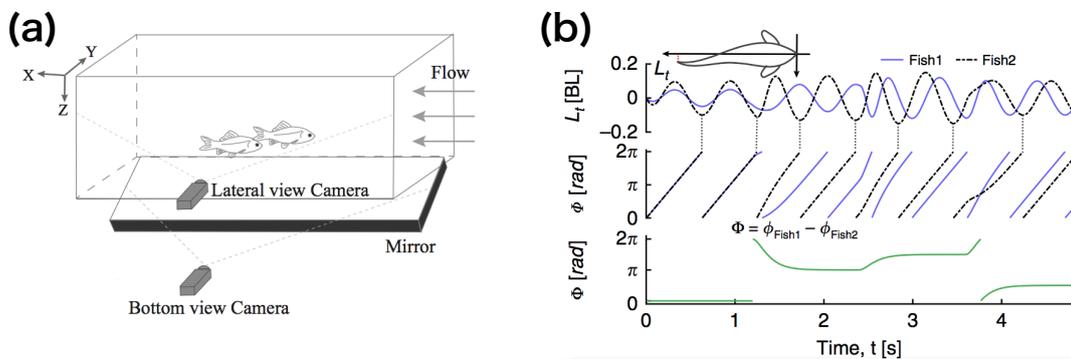


図 27: 尾ヒレの運動の解析 [75]. (a) 2 匹の金魚の実験のセットアップ. (b) 腹側から見た各魚の尾ヒレの横方向変位 L_t , 位相 ϕ , 及び位相差 Φ の時間発展. 図は [75] より許可を得て転載.

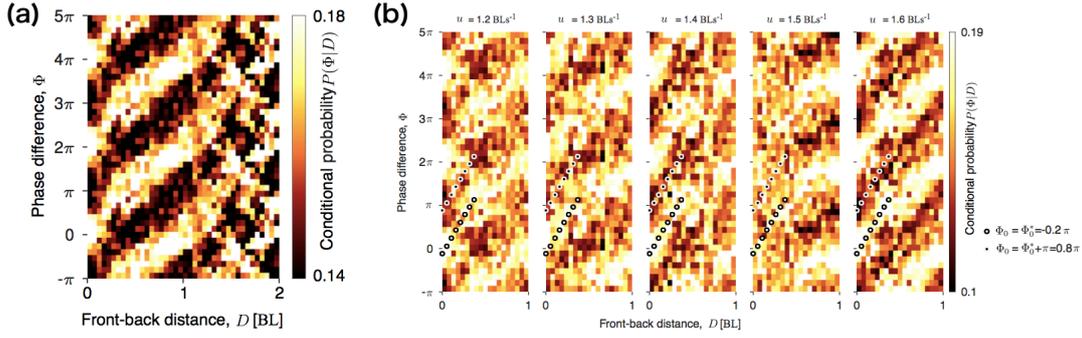


図 28: 位相差 Φ と前後距離 D の関数としての確率密度 $P(\Phi|D)$ [75]. (a) $D \leq 2$ [BL] までの確率密度. (b) $D \leq 1$ [BL] での背景流れの速さ u を変えたときの確率密度. 図は [75] より許可を得て転載.

にさらされた 2 匹の金魚の実験系を示す. このとき, 尾先端の横方向変位 L_t の時間発展を図 27(b) 上段に示す. すでに 2.3 節で言及したように, おおよそ振幅 A は 0.1 [BL] で振動運動していることが読み取れる. ここで, L_t が振動的な時間発展をしていることから, 尾ヒレの運動の位相 ϕ を定義することができる (図 27(b) 中段). この位相はヒルベルト変換と呼ばれる数学的手法を用いて定義されている (付録 A を参照). そして, 尾運動の位相差 Φ を先導魚の位相から後続魚の位相を引いたものとして定義する.

このとき, 図 28(a) に示すように, 2 匹の金魚を自由に (流れに沿って 1 次元的に) 泳がせた場合, 位相差 Φ と前後距離 D との間に何らかの関係性が生じる. つまり, 位相差 Φ と前後距離 D の分布関数 $P(\Phi|D)$ が一様分布とは異なる斜め縞状の非一様な分布を取る. $P(\Phi|D)$ は各 D において $\int_{-\pi}^{\pi} d\Phi P(\Phi|D) = 1$ となるように規格化されており, Φ と D の間に関係がなければ一様分布 $P(\Phi|D) = 1/2\pi \approx 0.16$ になるはずである. そして, この非一様性は実験系を暗転し視覚情報を遮っても, 側線の神経を麻痺させ流体場読み取りの能力を抑えても出現する. 従って, この結果は魚が受動的な流体力学的作用によって, ある距離のときに特定の位相差を採用するというを示唆している.

その流体力学的作用として逆カルマン渦による流れ場が関わっていると仮定すると, 定性的には図 29(a) のようなシナリオになる. まず, 図 29(a) の左と中央の図は特定の距離 D における, $\Phi = 0$ の場合と $\Phi = \pi/2$ の場合の模式図である. $\Phi = 0$ の場合は, 渦場による流れに逆らって尾ヒレを動かすことに対応し, $\Phi = \pi/2$ の場合は, 流れに乗る形で尾ヒレを動かすことに対応する. このとき, 直感的に考えれば $\Phi = \pi/2$ の場合の方が, より流体的な抵抗が少なく尾ヒレを動かせるのでエネルギー効率が良くなるはずである. また, 図 29(a) の右図は $\Phi = 0$ であるが, 先の例とは D が異なるので尾ヒレの運動と逆カルマン渦の流れが一致し, エネルギー効率が良い場合に対応する. このように考えれば, エネルギー効率が良い位相差は距離の関数になるはずである. それを定式化すれば,

$$\Phi = \frac{2\pi f}{u} D + \Phi_0 \quad (23)$$

と表せる. ここで, f は尾運動の振動数, Φ_0 は $D = 0$ におけるエネルギー効率が良い位相差である. ただし, 逆カルマン渦は背景流れに乗って流れてくると考え, 2 匹の魚は平均的に速さ u で推進している (実験系での重心速度がゼロ) としている. 従って, 右辺第 1 項

の物理的意味は、 D/u が先導魚の作る逆カルマン渦が後続魚の尾ヒレに到達するまでにかかる時間であるため、 $2\pi f D/u$ は逆カルマン渦が到達するまでに進んだ先導魚の位相を意味する。つまり、式 (23) は後続魚の位相に $2\pi f D/u + \Phi_0$ を足した位相が先導魚の位相であるとき、エネルギー効率よく遊泳できていることを表す式である。

実際、図 28(b) に示す通り、金魚の場合 $\Phi_0 = -0.2\pi$ とすると、 $D \leq 0.4[\text{BL}]$ 以内における $P(\Phi|D)$ のピーク位値を式 (23) でうまくフィッティングできる。これは、逆カルマン渦が尾ヒレの運動を受動的に変化させていることを示唆している。ただし、 $D > 0.4[\text{BL}]$ での理論式 (23) からのずれは、粘性流体中における逆カルマン渦の減衰等による変化によるものと考えられている。

加えて、[75] では、2 個の魚型遊泳ロボットを用いて $D = 0$ におけるエネルギー効率 η を位相差 Φ の関数として求めている。ただし、エネルギー効率は電力消費 P を用いて

$$\eta = \frac{(P_{\text{先導}}^{\text{水中}} - P_{\text{先導}}^{\text{空気中}}) - (P_{\text{後続}}^{\text{水中}} - P_{\text{後続}}^{\text{空気中}})}{P_{\text{先導}}^{\text{水中}} - P_{\text{先導}}^{\text{空気中}}} \quad (24)$$

と定義され、 $\eta > 0$ は後続魚 (後続ロボット) のエネルギー効率が良いことを示す。金魚における Φ の確率分布 $P(\Phi|D = 0)$ を用いて期待値 $\langle \eta \rangle$ をとることで、15% も単独遊泳に比べエネルギー効率が良いことがわかった (図 29(b))。このように、エネルギー消費自体はロボットで測定されているが、金魚においても遊泳エネルギーが抑えられていることを先行実験は示唆する。

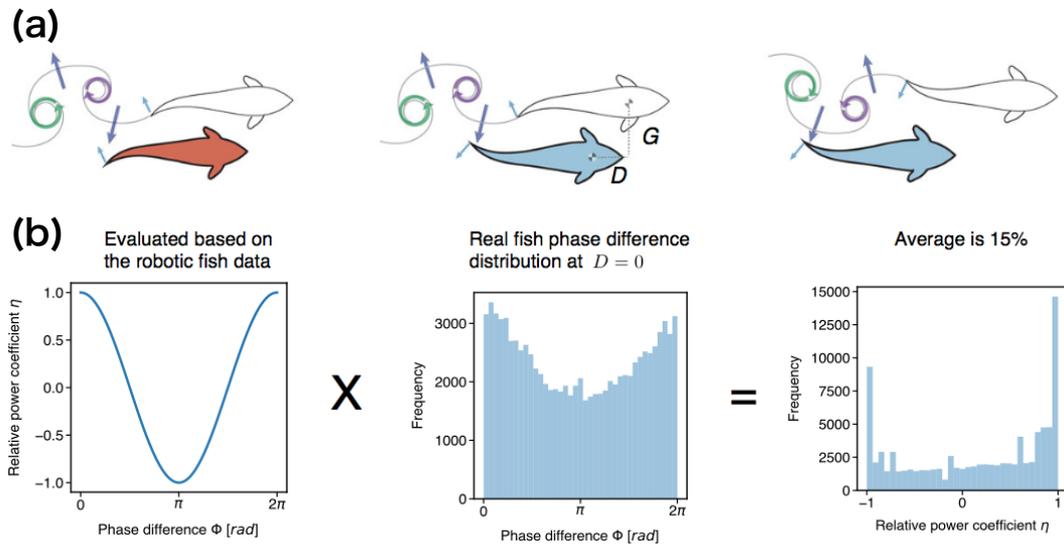


図 29: 遊泳エネルギー削減の実証 [75]。(a) 逆カルマン渦を用いた遊泳エネルギー削減策略の模式図。左がエネルギーコストのかかる例 ($\Phi = 0$)。中央と右がエネルギーコストが抑えられる例 (それぞれ $\Phi = \pi/2$, $\Phi = 0$)。青の矢印は渦列による流れの方向を表し、水色の矢印は尾ヒレの運動の方向を示す。(b) 位相差 Φ の関数としてのロボットのエネルギー効率 η と金魚の度数分布の組み合わせによる、 $D = 0$ での η の推定。図は [75] より許可を得て転載。

3.4 視覚を介した相互作用

ゼブラフィッシュやゴールデンシャイナーといった魚種は、側線による能動的な流体相互作用よりも、主に視覚を介した能動的相互作用を行うが知られている [95]。以下は主にこのような魚種の視覚相互作用に関する実験結果を述べる。

3.4.1 網膜の構造と脳への情報伝達

視覚を介した相互作用を担う神経機構について述べる。まず、光の刺激を初めに受け取るのは目の網膜である [96]。魚を含む脊椎動物の網膜は5種類の細胞から構成されている (図 30(a))。基本的な構造としては、光刺激によってグルタミン酸 (神経興奮物質の一種) を視細胞が放出し、それを受け取った双極細胞がグルタミン酸を放出、さらにそれを受け取った神経節細胞が脳へと信号を送るというリレー方式をとっている。グルタミン酸の受け渡しが3種の細胞に別れている理由は、それぞれの細胞層の間に水平細胞とアマクリン細胞という神経細胞が介入するためである [97]。簡便に説明すれば、水平細胞は、視細胞からグルタミン酸入力を受け、その量の多さに応じて GABA (神経抑制物質の一種) を放出し、像の境界のコントラスト強調などを担う。一方で、アマクリン細胞は30種以上もの種類が確認されており、その機能は多岐に渡るが、GABA を介して双極細胞や神経節細胞の興奮を抑制することは水平細胞と同じである。そのうちのいくつかは以下で述べる。

最終的に脳に信号を送るのは個々の神経節細胞だが、1つの神経節細胞に対して、他の細胞種を介して、間接的に複数の視細胞が接続されていることがわかる。言い換えれば、複数の視細胞による光刺激の情報が空間的に1つの神経節細胞に集約されていることを意味する。このように神経節細胞に間接的に接続された視細胞のなす空間領域を受容野 (図 30(b)) と呼ぶ [98,99]。魚の場合、神経節細胞は片目に対して 10^4 - 10^5 個程度 [96] 存

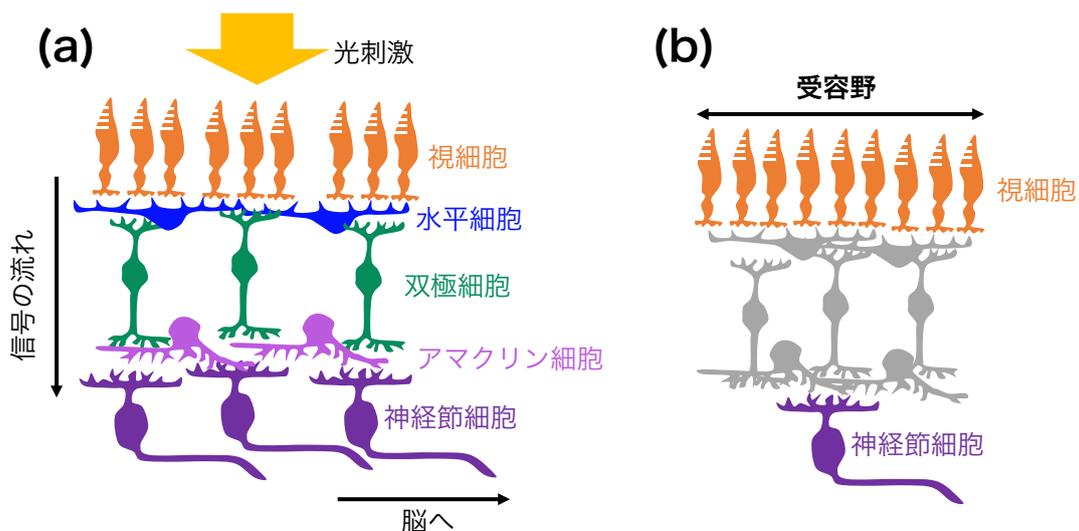


図 30: (a) 網膜の基本構造。各細胞の役割は本文を参照。(b)1つの神経節細胞が作る受容野の模式図。

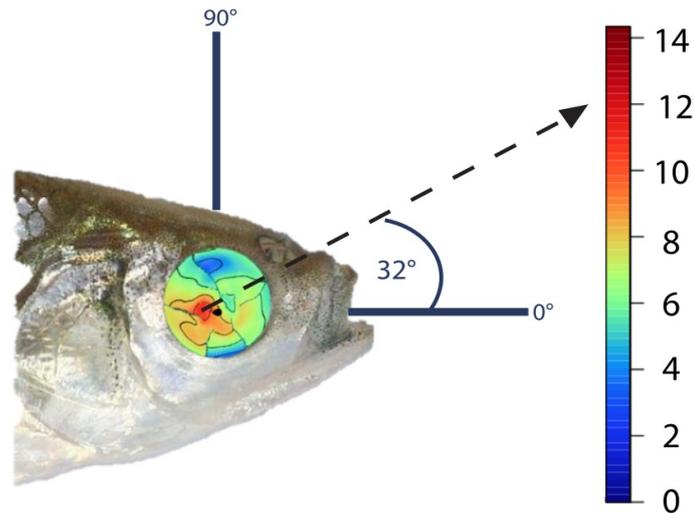


図 31: ゴールデンシャイナーの網膜上の神経節細胞の密度分布 [95]. カラーバーの単位は [細胞数/mm²×10³] である. 図は [95] より許可を得て転載.

在するが，網膜上のその空間分布は一様ではない [95]. 特に網膜上の尾側での密度の方が，頭側での密度より 2 倍程度大きい (図 31). 神経節細胞が脳へ送られる視覚情報の空間的解像度を支配するため，これは後方よりも前方の方が高い解像度で見ることができることを意味する (目のレンズを介して前方からの光は網膜上の尾側，後方からの光は網膜上の頭側に投射されることに注意).

また，魚は運動する像を追跡可能であることがわかっている [100,101]. 実際，縞模様のパターンや点状の像を運動させた場合，その速度に応じて脳へ送られる信号の強度が増すことが観測されている [102,103]. これは生理的にはいくつかの種類のアマクリン細胞が速度を検知可能であることに由来する. よく研究されているものとして，放射状の樹状突起を伸ばしたスターバーストアマクリン細胞がある [104]. 樹状突起の動径方向に光刺激が動くとき，その樹状突起が活性化し，神経節細胞に対し抑制物質 GABA を放出する機能が備わっているため，速度検知器として働く. このことおよび上述の神経節細胞の非一様な分布と整合して，観察される現象としても，ゴールデンシャイナーは前方にいる相対速度の大きい個体を追跡する傾向があることが確かめられている [105].

最後に，神経節細胞からの信号が到達する脳領域について述べる [106]. 魚の場合，神経節細胞からの信号は脳の中の視蓋と呼ばれる領域に送られる (図 32). これは哺乳類では視覚野に相当する脳部位である. このとき，網膜上の刺激の空間位置関係を保ったまま信号は視蓋に転写される. これをレチノトピックマップ (retinotopic map) と呼ぶ.

3.4.2 視覚刺激の像サイズ依存性

このように生成された像の刺激がどのように行動に反映されるのか，網膜に映る像の大きさに応じたゼブラフィッシュの反応の実験 [107] について述べる. 図 33(a) のように水槽に投影された像に対して，ゼブラフィッシュがどのような反応を示すかを観測している.

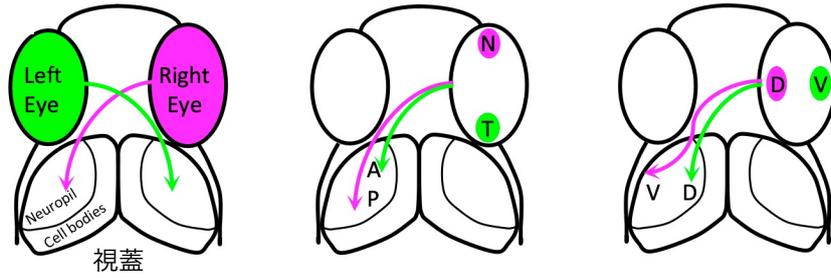


図 32: レチノトピックマップの模式図 [106]. (左図) 左目と右目の網膜からの情報は、それぞれ右脳と左脳中の視蓋に送られる。(中央図, 右図) 網膜上の前側 (N) 後側 (T) 上側 (D) 下側 (V) からの刺激は、視蓋の後側 (P) 前側 (A) 下側 (V) 上側 (D) の領域に転写される。図は [106] より許可を得て転載。

図 33(b), (c) は、像を 5 秒間投影したときの、像に対して回避行動を取る確率 (像は左目側にあるので、右へと運動の方向を変える確率) の時間発展を測定した結果を示す。左目側にある像を動径方向に伸ばすと、網膜上では鉛直方向の角直径 (像の占める角度) が増加し (b), 方位角方向に伸ばすと、網膜上では水平方向の角直径 (像の占める角度) が増加する (c)。このとき、鉛直角直径を増加させた場合は回避行動を取る確率も増加するが、水平角直径を増加させたときはその確率にほとんど変化は見られない。このように、鉛直方向の像のサイズを行動の指標に採用している理由は、魚が細長い体を持つことに由来すると考えられている。体が細長いため相手の個体が向きを変えると、網膜に映る相手の像の水平角直径は大きく変わるが、鉛直角直径は大きな変化を受けない。従って、鉛直角直径を用いると、そのサイズから相手までの距離を正確に測定することができるために、主に鉛直角直径を使って視覚相互作用をしていると主張される [107].

3.4.3 選択的意思決定

近年注目されている相互作用相手の選択方法の一つである選択的意思決定に関する実験を述べる。視野中の多数の相手と同時に相互作用する場合、脳に情報処理の大きな負荷が

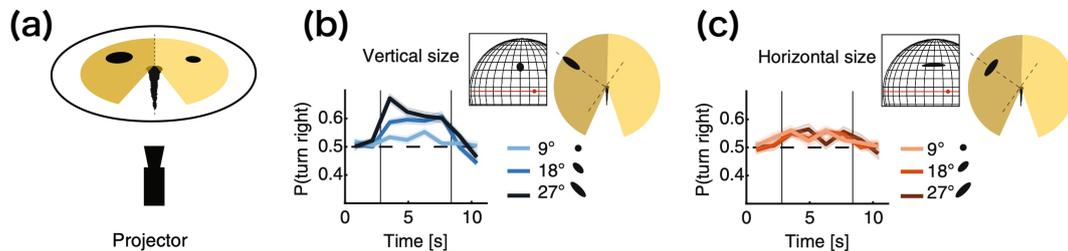


図 33: 視覚相互作用における像サイズ依存性 [107]. (a) 実験の設定図。プロジェクターを通して水槽の底に像が映される。(b, c) 網膜上の像の鉛直角直径、水平角直径をそれぞれ変化させたときの、像から回避行動を取る確率の時間発展。インセットの球面は網膜上での像の映り方を示している。図は [107] より許可を得て転載。

かかるため [108], 比較的小さな脳を持つ魚ではそのような相互作用方法は適さないと考えられてきた [109]. それを示すために様々な実験が考案された. ゼブラフィッシュが光に近寄る性質を利用して, 2つの離れた光スポットを水槽の底に投影した実験では, 視野中に同サイズの2つのスポットが存在するにも関わらず, どちらか一方のスポットに近づいていく様子が観測された [110]. このように2つのスポットからもたらされる視覚刺激を選択して接近行動を起こしていることから, 魚は選択的意思決定により行動していることが知られるようになった.

この選択的意思決定を明瞭に定量化したのが以下の実験である [111]. 水槽の底にゼブラフィッシュを模した2,3個の魚を模した映像(バーチャルフィッシュ)を投影し, 往復運動をさせる. このとき, 水槽にいるゼブラフィッシュはいずれかのバーチャルフィッシュを追跡し, その軌跡はバーチャルフィッシュの間を行き来するものとなる(図34(a)). 特に, ゼブラフィッシュの y 軸上の位置を確率分布として測定すると, バーチャルフィッシュ間の距離が増加するとともに, 確率分布の分岐現象が見られた(図34(b)-(e)). ゼブラフィッシュ(幼生)の体長はおおよそ1[cm]であることを考えると, 2個のバーチャルフィッシュ

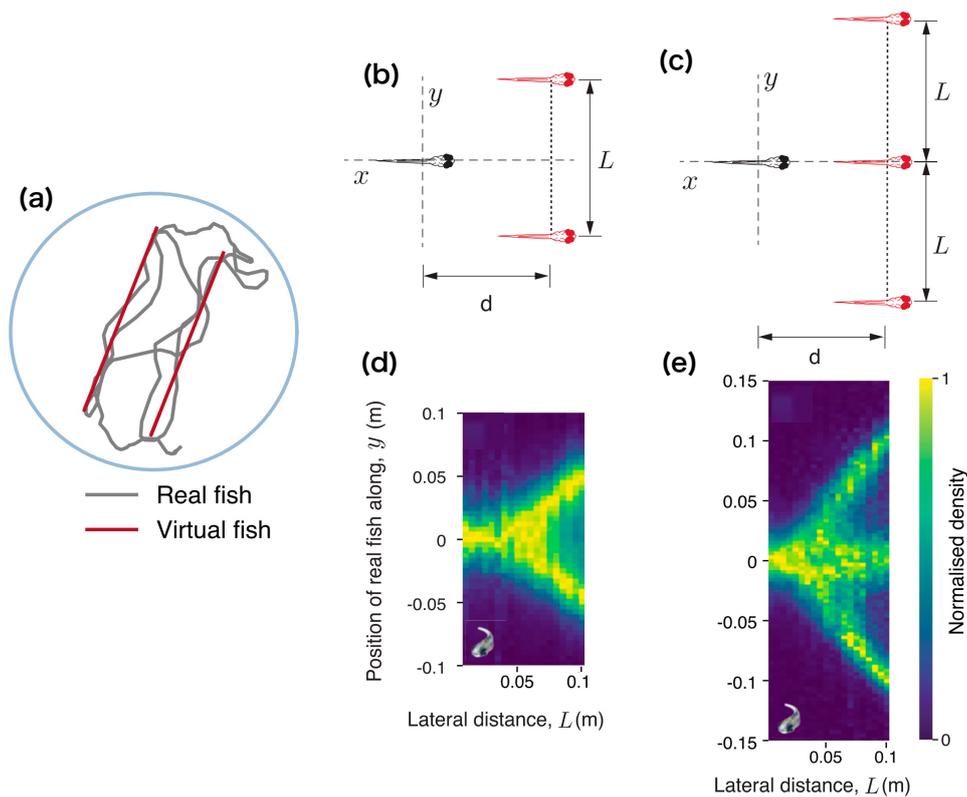


図 34: バーチャルフィッシュを追跡するゼブラフィッシュの実験 [111]. (a) 円形水槽におけるゼブラフィッシュ (灰) と 2 個のバーチャルフィッシュ (赤) の運動の軌跡. (b) 2 個または (c) 3 個のバーチャルフィッシュを追跡する場合の系の設定の様子. (d) 2 個または (e) 3 個のバーチャルフィッシュとともに動く座標系で見たときの, ゼブラフィッシュの y 軸上の位置の確率分布を, バーチャルフィッシュ間の距離 L に対してプロットした図. カラースケールは規格化された確率密度を表す. 図は [111] より許可を得て転載.

では 6[BL] 程度で確率分布が二又分岐することになる。同様に 3 個のバーチャルフィッシュでも 6[BL] 程度で三又分岐が出現する。これは、相手個体の距離が近いときは、全ての相手個体の平均的な中間の場所に位置するが、相手個体の距離が遠くなると、いずれかの個体を選択し注意を向ける先を絞ることを意味する。ちなみに、このような現象は同実験によりバッタやハエといった昆虫でも観測されており、選択的意思決定は生物種によらず普遍的に存在すると考えられている。また、先のトポロジカル相互作用は、少数の相手に限定して相互作用しているため、一種の選択的な相互作用と言える。

最近の別の実験では、シクリッド (*Etroplus suratensis*) の群れにおいて、相手個体を逐次的に 1 個体ずつ選択し配向相互作用を行うと仮定すると、群れの配向秩序変数の時間発展を記述できることがわかっている [112].

4 回転魚群に対する先行モデル

回転魚群，一般には回転パターンの再現を試みた先行モデルについて述べる．特に主張したいことは，実験で観測されているような群れのサイズが体長の数十倍以上 [6] にも及ぶ 3 次元の回転パターンは明示的に再現されていない，ということである．先行研究で扱われたモデルは多彩なので，それぞれについて小括していく．

4.1 メトリック相互作用型モデル

3.2.2 節で述べたトポロジカル相互作用が知られるようになったのは 21 世紀に入ってからであり [80]，それ以前の集団運動のモデル化では，暗に仮定されたメトリック相互作用を採用している [17, 20, 113–115, 117–119]．おそらく，魚の文脈で初めて集団運動のモデル化を実行したのは Breder の 1954 年の研究 [113] である．そこでは，魚間にクーロンの法則に従う斥力と一定の大きさの引力を組み合わせた力を仮定し，魚の凝集能力を説明できるかを定性的に検証している．つまり，群れの中での魚間の平衡距離を再現するようなパラメタを探索している．重要なことは，魚の間には分子間力のような，ある斥力と引力をもたらすポテンシャルが定義できることを提唱したということである．この考え方が自己駆動粒子に採用され [114]，ポテンシャル形の試行錯誤により数十粒子の少数系において回転パターンがもたらされた [115]．このようなポテンシャル型モデル (図 35(a)) では，相互作用の相手が実質的にポテンシャルの及ぶ特徴的な距離によって決まるので，メトリック相互作用型モデルに分類される．

一方，ポテンシャル型モデルとは別のメトリック相互作用型モデルとして，ゾーン型モデルが存在する．ゾーン型モデル (図 35(b)) は，相互作用の性質が自身からの同心円のゾーンによって分けられたモデルである [20, 117]．典型的には，自身から最も近い領域で斥力，その次に近い領域で向きを揃える配向相互作用，最も遠くで引力が働くようになっている [20, 117–119]．また，視覚情報を意識して，ゾーン後方に相互作用の働かない死角領域

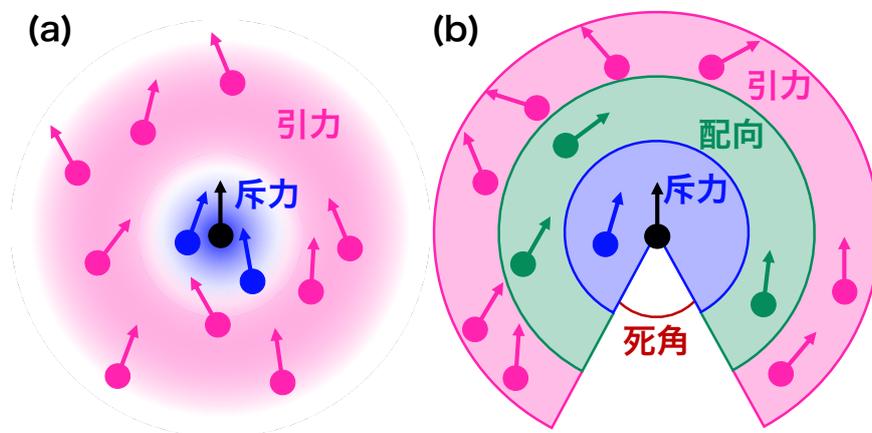


図 35: メトリック相互作用型モデルの模式図 [116]．(a) ポテンシャル型モデル．(b) ゾーン型モデル．図は [116] より許可を得て転載．

域を設けることも多い。また，配向相互作用のみのゾーン型モデルが 1.8 節でみた Vicsek モデル [17] である解釈も可能である。

現在でも集団運動の記述にメトリック相互作用を用いるものも多く，以下では，(魚のモデルに限らず) 多粒子系において回転パターンを得たものについて課題を含めてまとめる。

4.1.1 ポテンシャル型モデル

ポテンシャル型モデルで用いられるポテンシャルの代表例 [24,25,120,121] として，2 原子分子の原子間相互作用を表現するモースポテンシャル [122] がある。モースポテンシャルは次式で与えられる：

$$U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = C_r \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{l_r}\right) - C_a \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{l_a}\right). \quad (25)$$

ここで， $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ は粒子 i と粒子 j の粒子間距離 (原子間距離) であり， C_r ， C_a はそれぞれ斥力，引力の強度を決めるパラメタ， l_r ， l_a は斥力，引力の及ぶ特徴的な距離である。これを連続時間発展型の運動方程式 (式 (5)) において

$$\mathbf{F}_{\text{int},i} = -\nabla_i \sum_{j \neq i} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (26)$$

とすることで，粒子の運動を決定している。

このとき，2次元の系では， $l_a > l_r$ または $C_a < C_r$ という長距離で弱い引力を持つようなパラメタ領域では回転パターンが生じる ($l_a < l_r$ ， $C_a > C_r$ の領域ではクラスターが生じないガス状のパターンになる) [24,25]。例えば，式 (26) に $\sum_{j \neq i} \exp(-|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/l_c) \mathbf{v}_j / |\mathbf{v}_j|$ という配向相互作用を加えた系では，図 36(a) に示すような 2 方向回転パターンが生じ [24]，式 (26) のままの系では通常の 1 方向回転パターンが生じる (図 36(b)) [25]。

ただし，重要なことはこの系では基本的に粒子数が増えれば増えるほど，回転パターンのサイズが小さくなってしまいうことである (図 36(b))。最終的には $N \rightarrow \infty$ でサイズがゼロになることが示されている。これは，粒子密度が高いほど斥力領域にいる粒子数よりも

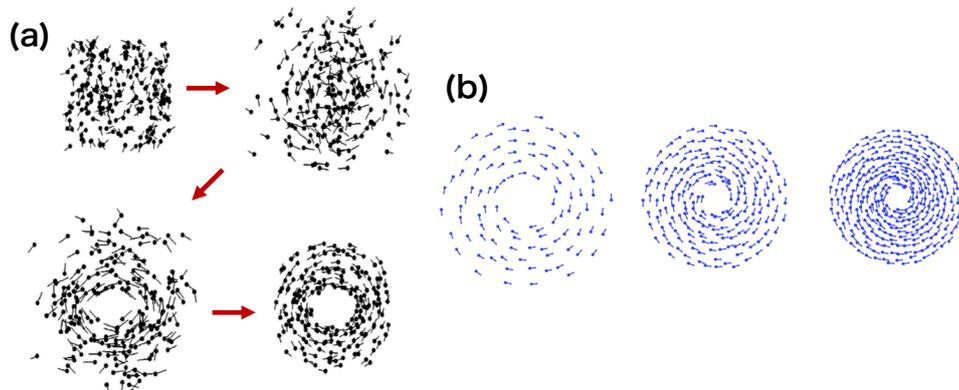


図 36: モースポテンシャルによる 2 次元の回転パターン。(a) 正方形領域に位置，向き共にランダムで配置された状態から，時計回りと反時計回りの回転が混在する 2 方向回転パターンが生じる過程 [24]。(b) 左から 100 粒子，200 粒子，300 粒子における同一パラメタでの (1 方向) 回転パターン [25]。図はそれぞれの文献より許可を得て転載。

引力領域にいる粒子数が相対的に多く引力の影響を強く受けて圧縮されてしまうことから定性的に理解できる．一方で，実際の生物の群れでは個体数が増えるほど群れは大きくなるので，この系の挙動は現実とは異なっている．加えて，図 36 のような小さい群れサイズでは，相互作用距離に群れのサイズが収まっているので，ある個体が群れのすべての個体の情報を把握していることに対応してしまう．なお， $C_r l_r^2 > C_a l_a^2$ の領域かつ，粒子速度が十分低速な場合は $N \rightarrow \infty$ でも粒子間距離が一定の，ゆっくり剛体回転する回転パターンが生じる [25]．しかし，モースポテンシャルではないポテンシャルを用いた 2 次元モデルでは，このような $N \rightarrow \infty$ でも粒子間距離が有限になるパラメタ領域は存在せず [123]，モースポテンシャルでの特殊事例である．

3次元のモースポテンシャル系においても同様のことが起こることが知られている [120]．3次元では2次元とは違い， $N \rightarrow \infty$ でも粒子間距離が有限になるパラメタ領域は存在せず，そもそも回転パターンが生じるパラメタ領域も狭まっている．また，低レイノルズ数でのストークス近似 [39] の流れ場を加えたモデル [121] でも回転パターンが出ているが，このモデルでは長距離流体相互作用を仮定しており，実験で観測されているような長距離相互作用の遮蔽 (3.2.1 節参照) までは反映できていない．

4.1.2 ゾーン型モデル

図 35(b) のような，斥力・配向・引力ゾーンを設けた典型的なゾーン型モデルで，3次元の回転パターンが得られることはポテンシャル型モデルより早くに知られていた [124]．ただし，このモデルで回転パターンを得るには引力領域の半径を斥力領域の半径の数十倍にする必要がある．つまり，回転パターンを得るには相互作用範囲を体長の数十倍程度にする必要があり，現実の魚群と対応させると群れ全体が相互作用距離の中に収まってしまう．以下では，このような 3 ゾーンのモデル以外のよりシンプルなゾーン型モデルについて述べ，それらのサイズについて見る．

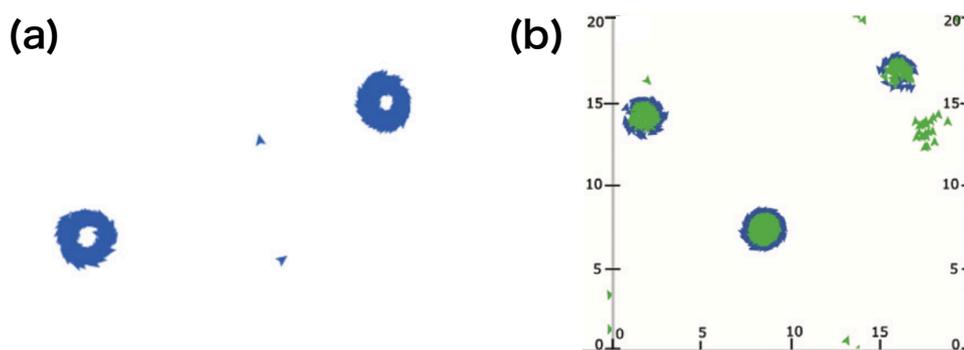


図 37: 式 (27) のモデルによる回転パターン [125, 126]．(a) と (b) どちらも 1 辺が $L = 20$ の周期境界条件のボックスで，位置，向き共にランダムな状態からシミュレーションを開始している．また，相互作用半径は $r = 1$ に規格化されており，死角は 180° としている．(a) 1000 粒子， $v/(r\omega) = 1.03$ での回転パターン [125]．(b) 2 種類の速度を用いたときの回転パターン [126]．それぞれ 1000 粒子で，緑の粒子が $v/(r\omega) = 0.4$ ，青の粒子が $v/(r\omega) = 1.0$ となっている．図はそれぞれの文献より許可を得て転載．

2次元において回転パターンをもたらす最も単純なゾーン型モデルのひとつとして Costanzo らによる一連の研究がある [125–127]. このモデルは 1.8 節の Vicsek モデル (式 (11)) に死角と最大回転角度を導入したシンプルなものである [125]. 具体的には、角度の離散時間発展方程式が以下のように変更される.

$$\theta_i(t + \Delta t) = \begin{cases} \theta_i(t) + \Delta\Theta_i + \Delta\theta_i(t) & [|\Delta\Theta_i| < \omega\Delta t], \\ \theta_i(t) + \omega\Delta t + \Delta\theta_i(t) & [\Delta\Theta_i \geq \omega\Delta t], \\ \theta_i(t) - \omega\Delta t + \Delta\theta_i(t) & [\Delta\Theta_i \leq -\omega\Delta t]. \end{cases} \quad (27)$$

ここで、 $\Delta\Theta_i = \text{Arg} \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i(t)} e^{i\theta_j(t)} \right) \in [-\pi, \pi]$ は相互作用領域での (自身を含めない) 粒子の角度の平均である. この大きさが最大回転角度 $\omega\Delta t$ を超えなければ、粒子 i は周りの粒子の平均角度を向くことができ、 $\omega\Delta t$ を超えている場合は $\pm\omega\Delta t$ 分しか角度を変えることができないようにモデル化されている. ちなみに、 $\omega\Delta t = \pi$ として死角領域をなくすと Vicsek モデル (式 (11)) に戻る.

最大回転角度と死角を設けることは、どちらも定性的には回転パターンの発生を促すことに寄与している. というのも、最大回転角度 $\omega\Delta t < \pi$ によって $\omega\Delta t = \pi$ の場合よりも、方向転換に数ステップ余計にかかるため、急激に向きを揃えることがなくなり配向パターンが抑制されるからである. また、死角は、回転パターンになったときに自身の後方にいる粒子を情報源として参照しないことで、前方付近にいる粒子を追随しやすくなり、回転パターンが安定化するという効果がある.

実際の回転パターンを図 37(a) に示す. 回転パターンは死角が 180° 程度で、粒子の速度 v と最大回転速度 $r\omega$ がおおよそ等しいときによく出現する. ただし、クラスターの半径は相互作用半径 r 程度が限界であり、相互作用半径の数十倍の回転パターンは出現しな

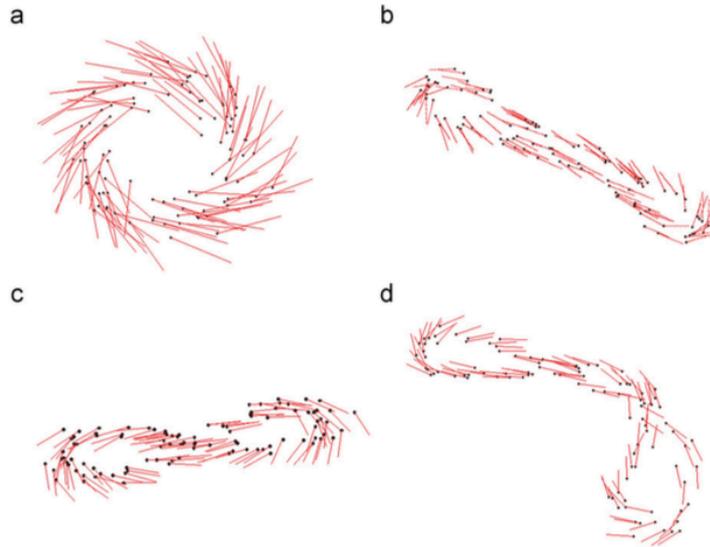


図 38: 重心引力ゾーン型モデルでの回転パターン [128]. いずれも 1 辺 $L = 40$ の周期境界条件のボックスで、初期条件は位置、向き共にランダムで実行. 100 粒子で相互作用半径は $R = 4$, 引力強度は $G = 1$ である. (a) 回転パターン ($D = 1.5$). (b, c, d) 鎖状回転パターン (b) 交差なし ($D = 2.6$). (c) 1 交差 ($D = 3.2$). (d) 2 交差 ($D = 3.0$). 図は [128] より許可を得て転載.

い。これは、速度の異なる 2 粒子系を用いた場合や (図 37(b)) [126], 相互作用に数ステップの時間遅れを導入した系 [127] でも同じである。

もうひとつの代表的なシンプルなゾーン型モデルとして、局所的な重心に向かう引力のみのモデルがある [128]. このモデルにおける速度の離散時間発展方程式は以下のように表される。

$$\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = D\hat{\mathbf{v}}_i(t) + G\hat{\mathbf{C}}_i(t) \quad (28)$$

において $\mathbf{v}_i(t + \Delta t)$ を規格化した $\hat{\mathbf{v}}_i(t + \Delta t)$ が、次ステップでの粒子の向きになる。ここで、 $\hat{\mathbf{C}}_i$ は

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (29)$$

を規格化した量で ($|\mathcal{V}_i|$ は相互作用領域内の粒子の集合の大きさを表す), 相互作用領域に入っている粒子の重心へ自身の位置から向かうベクトルとなっている。つまり, 自身の慣性を決める強度 D と重心への引力を決める強度 G の兼ね合いによって, 粒子の運動が決まっている。また, このモデルでも死角が設けられている。

図 38 に式 (28) のモデルによる 2 次元でのシミュレーション結果を示す。慣性の効果が比較的小さいときは単純な 1 方向回転パターンが得られ (図 38(a)), そこから慣性の効果を強めていくと鎖状回転パターンが得られる (図 38(b,c,d)). このモデルでも, クラスターの半径は相互作用半径程度であり, 巨大な回転パターンは得られていない。このことは, 連続時間発展型で同様の重心引力が働き, 同様の (鎖状) 回転パターンを得ることができるモデルでも同じである [129]. また, 式 (28) のモデルの 3 次元版のシミュレーションも存在するが, 回転パターンを得るためには相互作用領域での局所的な重心への引力に加え, 系全体に及ぶ大域的な重心への引力が必須になっている [130]. すなわち, ゾーン型モデルでも相互作用距離の数十倍の大きさの回転パターンは得られていない。

4.2 トポロジカル相互作用型モデル

トポロジカル相互作用型モデルの場合, 相互作用相手の選び方は距離には依存しない。例えば, 鳥のモデルの延長として, 2 次元の Vicsek モデルにおいて相互作用相手を n 次近接までに制限するシンプルなトポロジカル相互作用型モデルが存在する [80]. そこでは, 相互作用相手をメトリック型に選ぶか, トポロジカル型に選ぶかで, 群れの柔軟性が変化することを示している。すなわち, 向きの揃った 1 つの群れに摂動を加えたとき, メトリック型よりもトポロジカル型の方が, 群れが分裂しにくい。

このような, n 次近接までに制限するモデル以外にも, 「相互作用相手の選び方が距離には依存しない」という定義に当てはめれば, トポロジカル相互作用型モデルは複数の種類が存在する。以下では, それらのモデルについて述べる。

4.2.1 ボロノイ分割型モデル

相互作用相手をボロノイ分割によって決めるモデルが知られている [84]. ボロノイ分割とは, 固体物理学でのウィグナー・ザイツ胞のように, 各粒子ペアを結ぶ線上を二等分する面 (2 次元では線) によって空間を分割する方法である。図 39(a) に 2 次元のボロノイ分

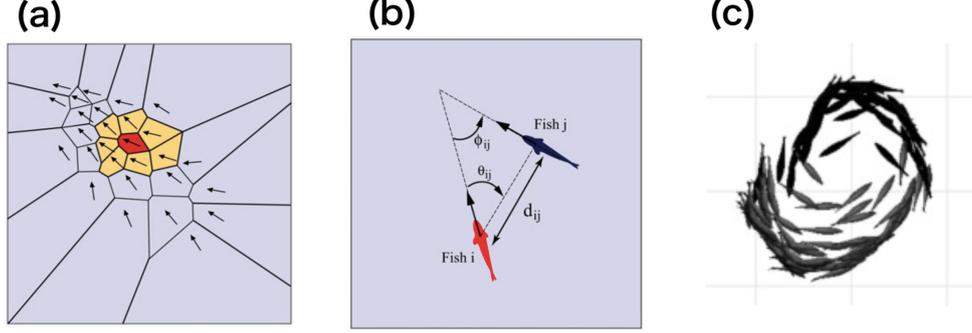


図 39: ボロノイ型モデルの模式図と回転パターン [131]. (a) ボロノイ分割の模式図. (b) 相互作用の模式図. (c) 式 (30) のモデルによる典型的な回転パターン. 図は [131] より許可を得て転載.

割の模式図を示す. この図の場合, 赤いセルにいる粒子は隣のオレンジ色のセルにいる 7 つの粒子が相互作用相手となる. このように, 相互作用相手は距離に依存しないのでトポロジカル相互作用型モデルに分類される.

2次元ボロノイ分割を用いた連続時間発展型のモデルは, 自己推進の速さは一定で, 自身の回転の角速度のみが変化するモデルになっている [84, 131]. すなわち, 粒子の向きのみ変化するモデルである. 角速度の時間発展方程式は以下のように与えられる.

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{v}{\xi} \{(1 + \cos \theta_{ij})\omega_i^* - \omega_i\}, \quad (30)$$

$$\omega_i^* = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} (k_V v \sin \phi_{ij} + k_P d_{ij} \sin \theta_{ij}). \quad (31)$$

ここで, d_{ij} は粒子 i と粒子 j の距離, θ_{ij} は位置の相対角度, ϕ_{ij} は向きの相対角度である (図 39(b)). 従って, 式 (31) の $k_V v \sin \phi_{ij}$ は (ネマチック的に) 向きを揃える配向相互作用を表し, $k_P d_{ij} \sin \theta_{ij}$ は距離とともに増大する引力相互作用を表す項となっている. また, 式 (30) の $1 + \cos \theta_{ij}$ は死角の効果を表現している.

このとき, 配向相互作用を支配するパラメタ k_V と引力相互作用を決めるパラメタ k_P の兼ね合いで, 出現する集団パターンが決まる. 具体的には, 単純に k_V が k_P より比較的大きいときは配向パターンが生じ, その逆の場合は回転パターンが生じる (図 39(c)). この回転パターンのサイズは論文 [131] 中には明記されていないが, 1000 粒子程度以上では回転パターンが安定せず, 100 粒子程度の小クラスターに分裂してしまうという問題点が存在する.

その後のモデルの改良により, 部分的な流体相互作用を導入することで体長の数十倍の大きさの回転パターンが出現することがわかっている [132, 133]. 部分的な流体相互作用とは, 点状粒子として表した魚が作る流体場で, 魚が泳ぐことで遠方に作られる流体場による相互作用である. その流体相互作用モデルは以下のように位置と向きの連続時間発展方程式で定式化される.

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{e}_i^{\parallel} + \mathbf{U}_i \quad (32)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \langle I_{\parallel} \sin \phi_{ij} + \rho_{ij} \sin \theta_{ij} \rangle + \Omega_i \quad (33)$$

$$\langle A_{ij} \rangle = \frac{\sum_{j \in \mathcal{V}_i} A_{ij} (1 + \cos \theta_{ij})}{\sum_{j \in \mathcal{V}_i} (1 + \cos \theta_{ij})} \quad (34)$$

ここで、 \mathbf{U}_i 、 Ω_i は粒子 i が受ける流体場の速度、角速度であり、 \mathbf{e}_i^{\parallel} は粒子 i の運動方向を示す単位ベクトル (自己推進速度ベクトル)、 ρ_{ij} は粒子 i と j の距離で定義される (図 40(a) を参照). 式 (32) は自己推進速度 \mathbf{e}_i^{\parallel} に流れ速度 \mathbf{U}_i を加えたものとなっている. また式 (33) は、近接相互作用による角速度 (式 (30, 31) での目標角速度) に流体場による角速度 Ω_i を加えた形となっている. 従って、流体場による速度、角速度が直接加算される形で方程式に組み込まれており、低レイノルズ数領域を意識して定式化されている. 具体的な流体の速度、角速度は以下の通りである (図 40(a) も参照).

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{u}_{ij}, \quad \mathbf{u}_{ij} = \frac{I_f}{\pi} \frac{\mathbf{e}_j^{\theta} \sin \theta_{ji} + \mathbf{e}_j^{\rho} \cos \theta_{ji}}{\rho_{ij}^2} \quad (35)$$

$$\Omega_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{e}_i^{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{e}_i^{\perp} \quad (36)$$

ここで、速度 \mathbf{U}_i が距離の逆 2 乗 $1/\rho_{ij}^2$ で減衰するのは、魚の作る流体場を双極子場と近似しているからである. これは魚が遠方に作る流れを定式化した先行研究 [134] に由来し、以下のような考えに基づく. 魚は後方に逆カルマン渦を放出しているが、これは別の見方をすると、魚には逆カルマン渦と逆の符号の循環が備わることに対応する. 従って平均的に見れば、体の左側には反時計回り、右側には時計回りの渦ができると近似的に見なすことができる. よって、式 (21) より、ひとつの渦による流れ場は距離に反比例して減衰するので、符号が異なる二つの渦がなす流れ場は遠方では距離の逆 2 乗で減衰する. (ちょうど、点電荷と電気双極子の作る静電ポテンシャルがそれぞれ距離の -1 乗と -2 乗で減衰することと同じ関係である.)

加えて、角速度 Ω_i が式 (36) の形になる理由は、図 40(b) に示す通りである. すなわち、体長を $2r_0$ とすれば、粒子の受ける角速度は、“頭”での速度と“尾”での速度の差分の体横方向の成分なので $\Omega_i = \{\mathbf{U}_i(\mathbf{r}_i + r_0 \mathbf{e}_i^{\parallel}) - \mathbf{U}_i(\mathbf{r}_i - r_0 \mathbf{e}_i^{\parallel})\} \cdot \mathbf{e}_i^{\perp} / 2r_0$ となり、遠方では $r_0 \ll \rho_{ij}$ なので $r_0 \rightarrow 0$ として \mathbf{e}_i^{\parallel} の方向微分が出てくる.

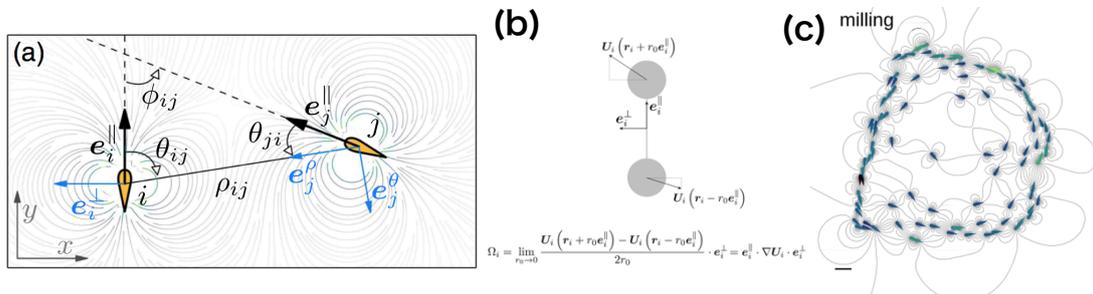


図 40: 流体相互作用を含むボロノイ型モデルの模式図と回転パターン [132]. (a) 相互作用の模式図. 灰色の線は流線を表す. (b) 流体の角速度の定式化. (c) 式 (32, 33) のモデルによる典型的な回転パターン. 魚の体の形状は模式的なものであり実際には考慮されていない. 図は [132] より許可を得て転載.

このとき、流体のない場合のモデルと同様、配向相互作用を支配するパラメタ I_{\parallel} が比較的小さい場合、図 40(c) のような回転パターンが出現し、流体が存在するとき ($I_f \neq 0$) の方が回転パターンが促進されやすいことがわかっている。また、回転パターンの大きさは図 40(c) のスケールバーが $10r_0 = 5[\text{BL}]$ を表すことを考えると、体長の数十から数百倍に及ぶとわかり、極めて巨大である。ただし、ここでも粒子数が 1000 程度を超えると、回転パターンが安定せずに小クラスターに分裂してしまう。

4.2.2 視覚型モデル

最後に、魚群に特化したモデルではないが、視覚情報を用いたトポジカル相互作用型モデルについて述べる [135,136]。このタイプのモデルでは、粒子に大きさを設け、そこから作られる像(影)を何らかの形で利用している。

例えば、2次元において像のエッジを利用するモデルである。図 41(a) にあるように、半径が 1 の円形粒子が作る像を考える。ただし、複数の粒子が重なって見える場合はそれらをまとめて 1 つの像とみなす。各像は 2 つの端(エッジ)を持ち、 i 番目の粒子から見た j 番目のエッジの角度 $\theta_{i,j}$ が決まる(図では $j = 1, \dots, 10 := \mathcal{N}_i$ 。ここで \mathcal{N}_i は i 番目の粒子から見える像のエッジの個数である)。このとき、

$$\delta_i = \frac{1}{\mathcal{N}_i} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_i} (\cos \theta_{ij}, \sin \theta_{ij}) \quad (37)$$

という、エッジの角度の平均の方向を向くベクトルを定める。またこれに加え、 $n = 4$ 次近接までとの粒子との配向相互作用による方向ベクトル

$$\beta_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|} \quad (38)$$

を考えて、向きの離散時間発展方程式は

$$\mathbf{v}_i = \chi_a \delta_i + \chi_b \beta_i \quad (39)$$

を規格化したものとして与えられる。ベクトル δ_i の意味を定性的に理解することは難しいが、一般には、遠い粒子の作る像のエッジほど 2 つの角度が近いので(図 41(a) では $\theta_{i,3}$

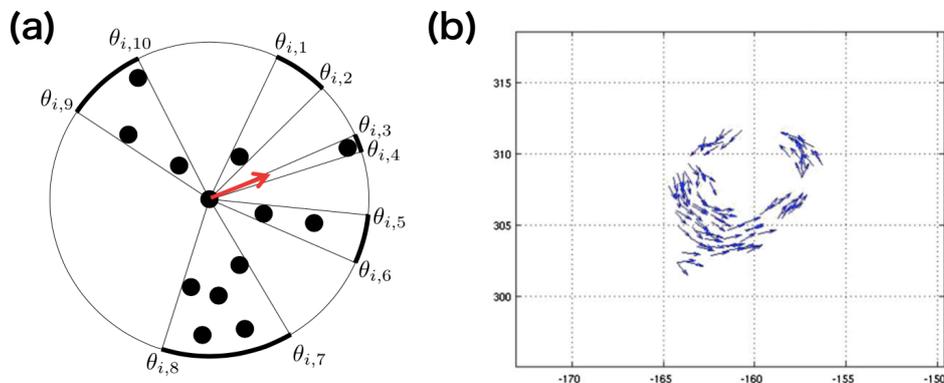


図 41: 視覚情報を利用したモデル [135]。 (a) モデルの模式図。 (b) 典型的な回転パターン。 図は [135] より許可を得て転載。

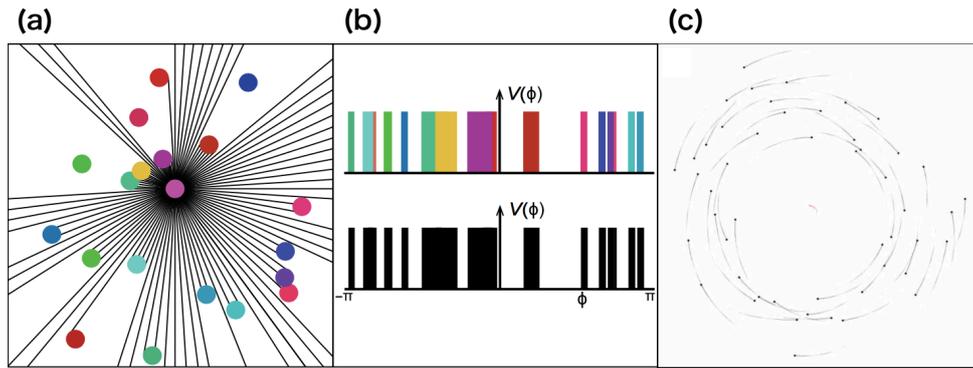


図 42: 視覚情報を利用した斥力・引力を含むモデル [136]. (a) モデルの模式図. 中心の粒子から見て, (b)(a)における中心の粒子の視覚関数 $V(\phi)$. 前方を $\phi = 0$, 左側を $\phi < 0$, 右側を $\phi > 0$ とする. (前方は (a) の図的に上方向.) (c) 典型的な 2 方向回転パターン. 図は [136] より許可を得て転載.

と $\theta_{i,4}$), 遠い粒子と向きを揃えやすいという傾向は主張可能であろう. このモデルにおいては, χ_d と χ_b が同程度の大きさのとき, 回転パターンが出現する傾向にある (図 41(b)). ただし, 3.1 節で見たように魚の場合, 視覚情報としては像のエッジではなく, 像の網膜に移る面積を使用していることには言及しておく.

また, これも魚の場合には対応しないが, エッジの平均方向から離れるような力が作用し, 像本体には引力が生じるモデルも存在する [136]. そこでは, 2 次元で図 42(a) のように粒子が配置しているとき, 図 42(b) のような明暗の 2 値視覚関数 $V(\phi)$ を用いてモデルを構築する (ϕ は粒子の前方から測った角度). モデルの詳細は煩雑になるため割愛するが, $V(\phi)$ が非ゼロの部分 (視覚が像に占められている部分) から引力を受け, $V(\phi)$ のエッジ部分から斥力を受けるように設定されている. このようなモデルにおいては, 2 方向回転パターンが出現している (図 42(c)).

以上のように, 本章のどのモデルにおいても回転魚群のように群れのサイズが体長より数十倍以上にも及ぶ 3 次元の回転パターンは再現されていない.

5 巨大回転魚群のモデル化

この章の結果は本研究に関する著者らの論文 [137] に基づく。(S. Ito and N. Uchida, Emergence of a Giant Rotating Cluster of Fish in Three Dimensions by Local Interactions, *J. Phys. Soc. Jpn.* **91**, 064806 (2022). doi:10.7566/JPSJ.91.064806 より許可を得て図表を転載。)

5.1 モデルの定式化

数千、数万匹からなる体長の数十倍の回転魚群のような3次元での巨大な回転する群れを再現するためには、前章で見た先行モデルとは異なる新規モデルを立てる必要がある。特に3.2節で見た、群れの中での引力の消失や、fast-startによる逃避行動を元にモデルを構築する。モデルでの個体の相互作用について概観すると以下ようになる。トポロジカル相互作用による相互作用上限数を設け、群れの中では相手個体から斥力や配向相互作用を受けるとする。これにより、過度な引力を受けないため、群れの大きさを保つことが可能となる。また、相手個体の数が相互作用上限数に満たない場合は、fast-startを模した短時間の引力が働く。これにより、個体の急激な運動方向の変化の伝播が生じ、群れの回転を促す。

モデルの詳細に移る。まず、 N 個の自己駆動粒子が、周期境界条件を課した1辺の長さ L の立方体のシミュレーションボックスに存在しているとする。 i 番目の粒子の位置を r_i 、速度を $v_i = dr_i/dt$ とする。各粒子は孤立しているときには速さ v_0 で自己推進し、ここに衝突回避のための斥力、向きを揃える配向相互作用、仮想的な捕食者から逃れ群れの中へ向かうfast-start(3.2.3節)を模した引力が相互作用として働く(相互作用の性質はメトリック的に距離に依存して決まる)。斥力と配向相互作用は、3.2.1節で見た(斥力・引力の)平衡距離 r_e 以内の範囲で生じ、相互作用相手はトポロジカル相互作用(3.2.2節)に倣って N_u 次近接の粒子までとする。そして、 i 番目の粒子と斥力・配向相互作用を行う粒

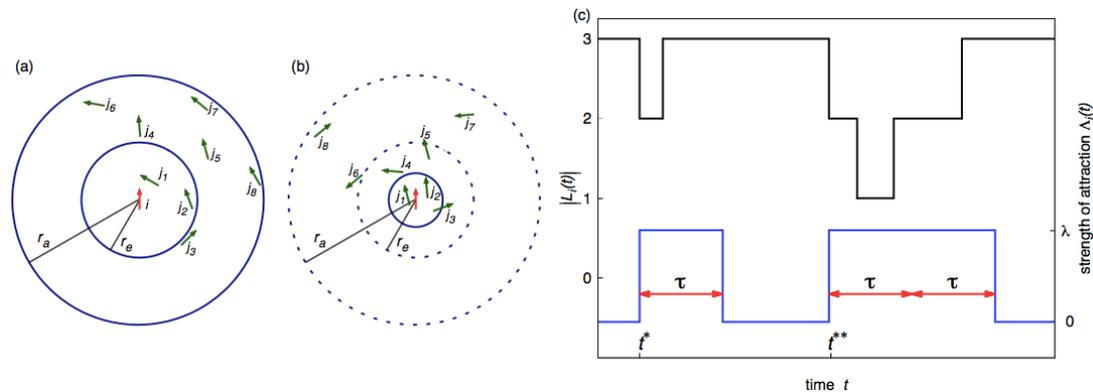


図 43: $N_u = 3$ の場合の相互作用の模式図。(a) $|\mathcal{L}_i| < N_u$ の場合、(b) $|\mathcal{L}_i| = N_u$ の場合の相互作用範囲。(c) $|\mathcal{L}_i(t)|$ (黒線)と $\Lambda_i(t)$ (青線)の時間発展の例。 $|\mathcal{L}_i| < N_u$ となる時刻 t^* においては $t^* + \tau$ まで引力が発動し、時刻 t^{**} では $t^{**} + 2\tau$ まで引力が継続する。

子の集合を \mathcal{L}_i , 集合のサイズ (粒子数) を $|\mathcal{L}_i|$ とする. 例えば, 図 43 は $N_u = 3$ の場合の模式図で, (a) では $\mathcal{L}_i = \{j_1, j_2\}$, $|\mathcal{L}_i| = 2$, (b) では $\mathcal{L}_i = \{j_1, j_2, j_3\}$, $|\mathcal{L}_i| = 3$ となる. 一方で, 引力は距離 r_e から r_a の範囲にいる粒子に働く (r_a は引力が効かなくなる距離). i 番目の粒子と引力相互作用を行う粒子の集合を \mathcal{A}_i , 集合のサイズを $|\mathcal{A}_i|$ とする. 例えば, 図 43(a) では $\mathcal{A}_i = \{j_3, j_4, \dots, j_8\}$, $|\mathcal{A}_i| = 6$ となる.

このような系を支配する連続時間発展方程式を以下のように定める.

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = & (v_0 - |\mathbf{v}_i|)\hat{\mathbf{v}}_i + \frac{1}{|\mathcal{L}_i|} \sum_{j \in \mathcal{L}_i} g(|\mathbf{r}_{ij}|)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \\ & + \frac{1}{|\mathcal{L}_i|} \sum_{j \in \mathcal{L}_i} g(|\mathbf{r}_{ij}|)(v_r \hat{\mathbf{r}}_{ij} - \mathbf{v}_i) + \frac{\Lambda_i(t)}{|\mathcal{A}_i|} \sum_{j \in \mathcal{A}_i} (v_a \hat{\mathbf{r}}_{ji} - \mathbf{v}_i) \end{aligned} \quad (40)$$

ここで, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ は粒子 j に対する粒子 i の相対位置ベクトルで, ベクトル量にハット記号をつけたものは, そのベクトル量を規格化したものを意味する. 左辺において, 粒子の質量は 1 に規格化しており, 特徴的な運動のタイムスケール τ_0 を導入している. 一方で, 右辺では 4 つの項があり, 第 1 項は自己推進項 (式 (8) に同じ), 第 2 項が配向相互作用, 第 3 項が斥力相互作用, 第 4 項が引力相互作用の項である. また, v_r が衝突回避の速度であり, v_a が fast-start で到達する最大速度である. 斥力と配向相互作用に対しては直接の体の接触による排除体積効果が加わっており, 関数 $g(|\mathbf{r}|)$ に含まれる:

$$g(|\mathbf{r}|) = \begin{cases} \frac{r_b}{|\mathbf{r}|} & [|\mathbf{r}| \leq r_b], \\ 1 & [|\mathbf{r}| > r_b]. \end{cases} \quad (41)$$

ここで, r_b は体長である. このようにして, 式 (40) においては, 全ての項が自身の速度 \mathbf{v}_i を目標の速度 (それぞれ $v_0 \hat{\mathbf{v}}_i$, \mathbf{v}_j , $v_r \hat{\mathbf{r}}_{ij}$, $v_a \hat{\mathbf{r}}_{ji}$) に合わせようとするように定式化されている. これは, 先行モデルの直接的かつ受動的な力の導入による相互作用よりも, 能動的な速度調整を行うこととして相互作用を定式化しているためである. これにより, 実験で観測された速度とパラメタを一致させやすくなるという利点もある.

このモデル化において最も重要な関数が引力の強度を決定する $\Lambda_i(t)$ である. $\Lambda_i(t)$ は $|\mathcal{L}_i|$ の関数になっており, $|\mathcal{L}_i|$ の値に応じて fast-start としての引力の入り切りがなされる. 具体的には, $|\mathcal{L}_i(t)| < N_u$ になった瞬間に $\Lambda_i(t) = \lambda$ となり, それが fast-start の短時間の持続時間 $\tau = 0.1[\text{s}]$ だけ続く. そして, $|\mathcal{L}_i(t + \tau)| = N_u$ であれば, $\Lambda_i(t + \tau) = 0$ となって引力が消失するようになっている. ただし, $|\mathcal{L}_i(t + \tau)| < N_u$ の場合は, もう一度 τ だけ $\Lambda_i(t + \tau) = \lambda$ が持続し, $|\mathcal{L}_i(t + \tau)| = N_u$ となるまでこれを繰り返す. 図 43(a), (b) にそれぞれ, 引力が発生しているとき, 消失しているときの相互作用範囲を示し, 図 43(c) に $|\mathcal{L}_i(t)|$ と $\Lambda_i(t)$ の時間発展の具体例を示す. 定性的には, このような $\Lambda_i(t)$ の挙動は 3.2.3 節で見たように, 群れの境界にいるとき fast-start が発動し, 群れの中にいるときは発動しにくいことを反映している. また, 引力が r_e から r_a の範囲までにいる粒子に対して作用することは, 視覚によって群れを捉え, その方向に向かっていくことを反映している.

また, 式 (40) を数値積分する際は, $dt = 0.005$ の時間刻みで 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて計算した [138].

5.1.1 各パラメタ値の実験値との対応

本モデル中に現れるパラメタの妥当な値について考察していく．表 1 は，パラメタとその値のリストである．特に速度や時間のパラメタの値を決めるには，適切な見積もりが必要である．

まず，定常遊泳速度 v_0 は魚種や個体により $0.5 \sim 5.0 \text{ BL s}^{-1}$ と，ある程度のばらつきは認められるが，多くの魚種は $1 \sim 3 \text{ BL s}^{-1}$ で遊泳するため (2.4 節も参照) [38, 51, 52, 68, 139, 140]， $v_0 = 1.5 \text{ BL s}^{-1}$ を採用した．特徴的なタイムスケール τ_0 については，この v_0 と典型的な加速度の比から見積もるのが妥当であろう．定常遊泳の速度の背景場に流されているときや， r_e 以内で相互作用しているときの加速度は $a_0 = 0.1 \sim 1.0 \text{ BL s}^{-2}$ のオーダーである [68, 77, 140]．従って， $\tau_0 \approx v_0/a_0 \approx 1 \text{ s}$ と見積もることができる．この評価であれば，定性的には $v_0\tau_0 \approx r_e$ で，速度が変化するまでの遊泳距離と相互作用距離が同等という妥当な関係式を得ることができる．また，衝突回避のための速度 v_r は直接的には測定されていないが，定常遊泳の速度の背景場に流されているときの加速度と r_e 以内で相互作用しているときの加速度が同じオーダーであることを考えると， $v_r \approx v_0$ と考えてよい．

fast-start の最大到達速度 v_a に関しても，実験値には $5.3 \sim 27.3 \text{ BL s}^{-1}$ とばらつきがあるが，多くの魚種で $7 \sim 11 \text{ BL s}^{-1}$ の値をとるため (2.4 節も参照) [64, 139]， 7.5 BL s^{-1} を採用した．また，fast-start の持続時間 τ は典型的な 0.1 s を用いる．ちなみに，本モデルでは λ を可変パラメタとしているが， λ の取りうる値を大雑把に見積もることも可能である．fast-start での加速度はおおよそ数十 BL s^{-2} であるため [64, 68]， v_a と比をとることで fast-start の時定数は 0.01 s から 0.1 s のオーダーであると言える．このとき定数が τ_0/λ に対応するため λ は 1 から 10 のオーダーと見積もれる．

加えて， N_u の評価も示す．3.2.2 節で見たように，魚の場合 N_u の値は 1, 3, 6-8 などと揺れがあるが，ここでは別の実験 [141] を用いて見積もってみる．コイ，セイス，ニシンといった 3 種の淡水魚，海水魚を用いて n 次近接の距離の分布を測定したところ，どの魚種でも 3 次近接の分布のピークが 1.5 BL 以内に入ることが知られている．この 1.5 BL は r_e に近いので， $N_u \approx 3$ と見積もることが可能である．

表 1: パラメタのリスト．本モデルではリスケールされた値を使用する ($r_e = 1.5 \text{ BL} = 1$, $\tau_0 = 1 \text{ s} = 1$).

記号	定義	実験値	採用値	リスケール値
r_e	平衡距離	$\sim 1.5 \text{ BL}$ [76, 77]	1.5 BL	1
r_a	引力の半径	$\gtrsim 5 \text{ BL}$ [76, 77]	7.5 BL	5
r_b	体長	1 BL	1 BL	2/3
v_0	定常遊泳速度	$0.5 \sim 5 \text{ BL s}^{-1}$ [38, 51, 52, 68, 139, 140]	1.5 BL s^{-1}	1
v_r	衝突回避速度	–	1.5 BL s^{-1}	1
τ_0	特徴的なタイムスケール	$\sim 1 \text{ s}$ [38, 51, 52, 68, 77, 139, 140]	1 s	1
v_a	fast-start の速度	$5.3 \sim 27.3 \text{ BL s}^{-1}$ [64, 139]	7.5 BL s^{-1}	5
τ	fast-start の持続時間	$0.03 \sim 0.18 \text{ s}$ [63, 64]	0.1 s	0.1
N	粒子数	–	変数	350 \sim 15000
N_u	相互作用粒子数上限	–	変数	1 \sim 50
λ	引力の強さ	–	変数	0.2 \sim 25.0

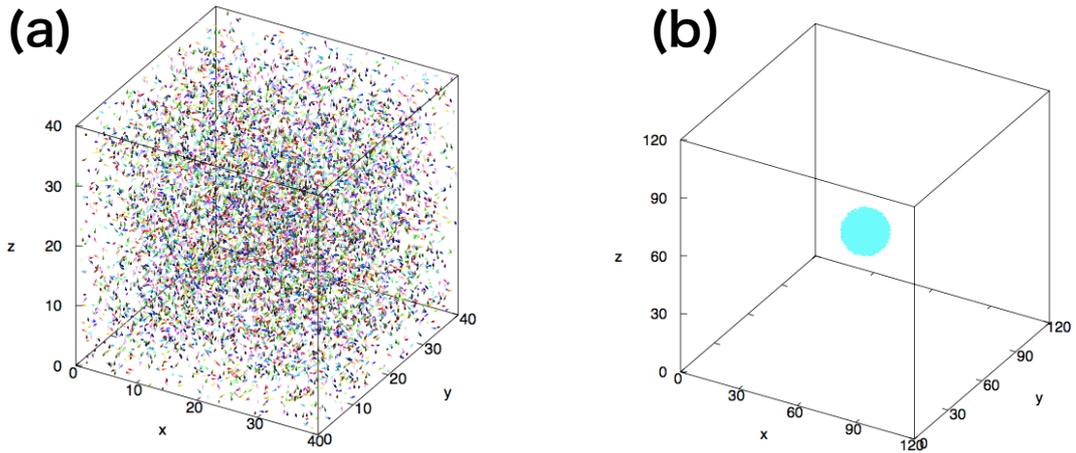


図 44: 初期条件のスナップショット．色は粒子の速度の向きを反映する．(a) ランダム初期条件の例．(b) クラスタ初期条件の例．

以上のようなパラメタ設定において，長さと時間を $r_e = 1.5 \text{ BL} = 1$, $\tau_0 = 1 \text{ s} = 1$ となるようにリスケールしてシミュレーションを行う．

5.1.2 初期条件の設定

本モデルでは，以下の 2 種類の初期条件を用いる．

- ランダム初期条件：1 辺が $L = 35$, 40 のシミュレーションボックスを用い，各粒子は位置，向き共にランダムで，速さは $|\mathbf{v}_i(t=0)| = v_0$ とした場合 (図 44(a)).
- クラスタ初期条件：1 辺が $L = 120$ のシミュレーションボックスを用い，各粒子が互いにほとんど r_e の距離をとってコンタクトした 1 つの球状クラスタから始める場合．ただし，向きは x 軸に平行で向きが揃っているものとし，速さは $|\mathbf{v}_i(t=0)| = v_0$ とする (図 44(b)).

2 種類の初期条件を使い分ける理由は以下の通りである．ランダム初期条件はランダムな状態から自発的に回転パターンが生じることを示すために用いる． $L = 35, 40$ という値は，ランダムな状態から定常状態になるまでにかかる計算コストを抑えるために適切に設定されている．例えば，初期条件からの時間発展によって数個のクラスタができるが， L が非常に大きい場合，これらのクラスタが衝突して 1 クラスタになるのに非常に時間がかかってしまう．逆に， L が小さすぎる場合は，1 クラスタになったときに周期境界条件の影響でクラスタの端と端が接触し，有限サイズ効果が出てしまう．

クラスタ初期条件を使う利点は 2 つある．1 つ目は 1 クラスタ状態が安定かどうかを直ちに判定できる点である．もし，1 クラスタ状態が不安定であれば，クラスタは分裂すると考えられる．2 つ目は，1 クラスタ状態から始めるので， L を極めて大きくしても大きな計算時間を要さない点である (ここでは $L = 120$)．パラメタ (N, N_u, λ) によっては，巨大な (リング状の) 回転クラスタが生じるため，計算コストに鑑みてクラスタ初期条件を選択する必要があるが出てくる．

ここで問題となるのは，クラスタ初期条件において球状クラスタの半径をどのよう

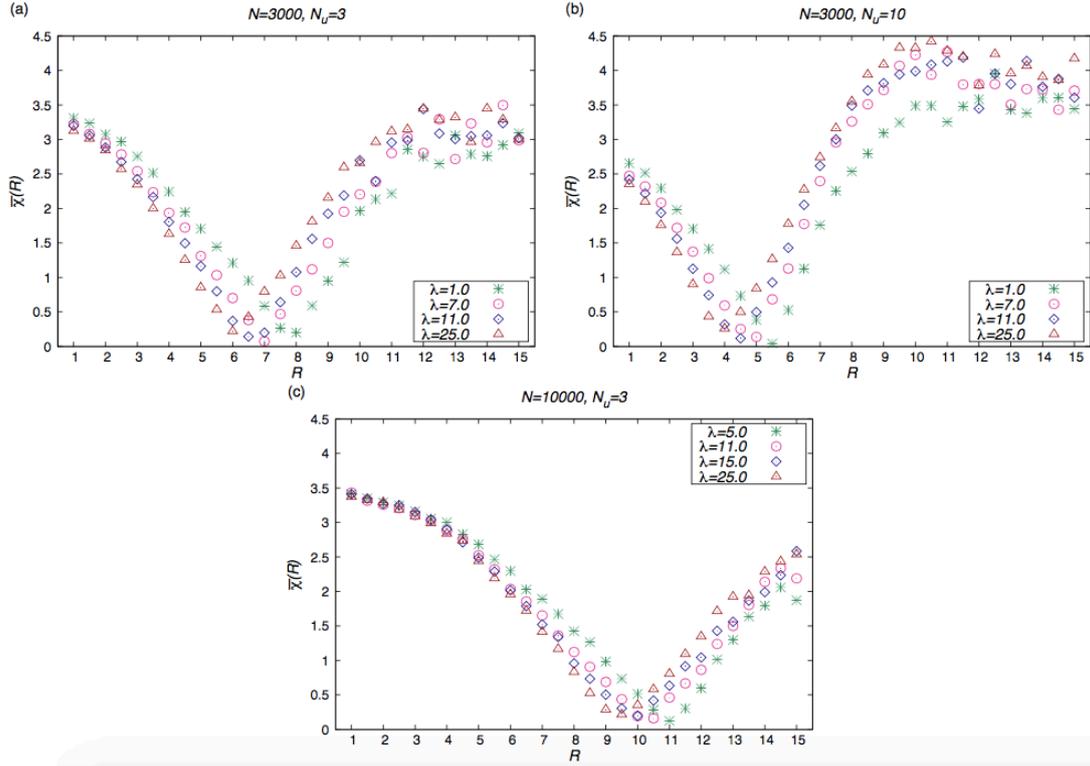


図 45: R_χ の決定方法の例. (a) $N = 3000$, $N_u = 3$ の場合. 例えば, $\lambda = 1.0$ では $R_\chi = 8.0$ において $\bar{\chi}(R)$ が最小化される. (b) $N = 3000$, $N_u = 10$ の場合. (c) $N = 10000$, $N_u = 3$ の場合.

に決定するかということである. まず, 半径 R の球の中にランダムな位置で粒子を配置する (速度は $\mathbf{v}_i(t=0) = (v_0, 0, 0)$). このとき, R を小さくしすぎると斥力によってクラスターは急速に膨張し分裂するが, R を大きく取りすぎても引力によって多数のクラスターに分裂してしまう. 従って, 初期半径 R の 1 クラスターを短時間保っていたとき, これを最適化半径 R_χ としてクラスター初期条件に採用する. 定量的には以下のようにして, 各パラメタ (N , N_u , λ) ごとに R_χ を決定する. クラスターの半径の R からのずれを表す量として

$$\chi(R, t) = \left| \frac{S_1(t) + S_2(t) + S_3(t)}{3} - R \right| \quad (42)$$

という量を考える. ここで, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$ はクラスターの慣性モーメントテンソルの固有ベクトル方向のクラスターサイズである. つまり, $(S_1(t) + S_2(t) + S_3(t))/3$ はクラスターの平均的サイズ (半径) ということになり, それが R からどれだけ離れているかを測定する量が $\chi(R, t)$ である. R は 1 から 15 まで 0.5 刻みで調整され, $\chi(R, t)$ の $t = 0$ から $t = 10$ までの時間平均 $\bar{\chi}(R)$ が最小になるような R を R_χ と定める. 図 45 は R_χ の決定のいくつかの例を示している.

5.2 測定量の導入

集団パターンの解析に必要な諸量を定義する．まず，クラスターの定義である．ある粒子の最近接の粒子が r_a 以内の距離に存在するとき，その粒子は最近接の粒子が属するクラスターに属すると定義する．このクラスタリングの定義によって定められた，系の最大のクラスターに属する粒子の集合を \mathcal{C} と書く．このとき，

$$p_c(t) = \frac{|\mathcal{C}(t)|}{N} \quad (43)$$

を，最大のクラスターに属する粒子数の割合とする．1 クラスターしかない状態であれば $p_c = 1$ となり， $p_c < 1$ であればクラスターの分裂が起こったことがわかる．

秩序変数に関しては，ほとんど式 (1)，(4) と同じであるが，全粒子ではなく最大クラスターのものとして定義し，ベクトル表示にしておく．配向秩序変数ベクトルを

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{|\mathcal{C}(t)|} \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \hat{\mathbf{v}}_i(t), \quad (44)$$

回転秩序変数ベクトルを

$$\mathbf{M}(t) = \frac{1}{|\mathcal{C}(t)|} \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \hat{\mathbf{c}}_i(t) \times \hat{\mathbf{v}}_i(t) \quad (45)$$

とする．ただし，最大クラスターの重心位置を $\mathbf{r}_G = \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \mathbf{r}_i / |\mathcal{C}(t)|$ として， $\mathbf{c}_i(t) = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G$ である．

続いて，回転クラスターにおける回転軸から測った各粒子の位置 \mathbf{c}_i^\perp を， $\mathbf{M}(t)$ と $\mathbf{c}_i \times \mathbf{M}(t)$ に垂直な方向への \mathbf{c}_i の射影として定める．このとき，回転クラスターの外径

$$R_o(t) = \max_{i \in \mathcal{C}(t)} |\mathbf{c}_i^\perp(t)| \quad (46)$$

と内径

$$R_i(t) = \min_{i \in \mathcal{C}(t)} |\mathbf{c}_i^\perp(t)| \quad (47)$$

を定義する (R_i の下つき添え字 i は “inner radius” の頭文字 i を意味し，粒子番号ではないことに注意)．また，平均の角速度を

$$\Omega(t) = \frac{1}{|\mathcal{C}(t)|} \left| \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \frac{\mathbf{c}_i^\perp(t) \times \mathbf{v}_i(t)}{|\mathbf{c}_i^\perp(t)|^2} \right| \quad (48)$$

とする．これより粒子が回転クラスターを周回するときの周期がわかる．

慣性モーメントテンソルを

$$I_{\mu\nu}(t) = \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} (c_i^2(t) \delta_{\mu\nu} - c_{i,\mu}(t) c_{i,\nu}(t)) \quad (49)$$

とする．ここで， $\mu, \nu = x, y, z$ であり， $\delta_{\mu\nu}$ は単位テンソルの成分である．このテンソルを対角化することで，固有値として主慣性モーメント $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ ，(規格化された)

固有ベクトルとして $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{u}_2(t)$, $\mathbf{u}_3(t)$ を得ることができる。ただし、主慣性モーメントの大きさは $I_1(t) \geq I_2(t) \geq I_3(t)$ とする。また、固有ベクトル方向のクラスターサイズを

$$S_\alpha(t) = \max_{i \in \mathcal{C}(t)} |\mathbf{c}_i(t) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t)| \quad (50)$$

と定義する ($\alpha = 1, 2, 3$)。主慣性モーメントの大きさの順序付けの定義により、例えばトーラス状のクラスターでは S_1 が高さの半分、 S_3 が外径に対応する。あるいは、楕円体状のクラスターであれば、 S_1 が半短軸、 S_3 が半長軸に対応する。続いて、主慣性モーメントの比

$$I_s(t) = \frac{2I_1(t)}{I_2(t) + I_3(t)} \quad (51)$$

を定義しておく。仮に、完全なトーラス形状を取っているとすると、付録 B の式 (B.15) より

$$I_s(t) = \frac{8(R_o + R_i)^2 + 6(R_o - R_i)^2}{4(R_o + R_i)^2 + 5(R_o - R_i)^2} \quad (52)$$

となる。特に、 $R_i = R_o$ のリング形状では $I_s = 2$ 、 $R_i = 0$ で穴がちょうど閉じた状態では

$$I_s(t) = \frac{14}{9} \quad (53)$$

を得る。

5.3 集団パターンと相関

以下の節で結果を示す。図 46 は $t = 1500$ における群れの動的定常状態でのスナップショットである。(a)-(c) に対してはランダム初期条件を適用し、(d), (e) に対してはクラスター初期条件を採用した。適切なパラメタを選ぶことによって、様々な形状の回転パターンが生じることがわかる。図 46(a), (b) はトーラス状、(c) は球状、(d), (e) はリング状の回転パターンである (定量的な分類は次節で行う)。特に、球状の回転クラスターは、パターンとしても先行モデルで再現されていなかったものであり、自然界の魚の群れの “bait-ball” に対応する (図 3(e)) [8]。図 46 中のクラスターでは、最も小さいもので (a) 約 19 の大きさをとり、最も大きいもので (d) 約 40 の大きさをとっている。いずれも $r_e = 1$ のみならず $r_a = 5$ と比べても数倍を超えており、体長の数十倍の大きさの群れが出現する。

また回転パターン以外の集団パターンも出現する。図 47 はいずれもランダム初期条件から始めたときの $t = 1500$ でのスナップショットで、(a) が向きの揃った群れ、(b) が各粒子が乱雑な向きをとる群れ、(c) が動的に形が変形する群れである。この場合も、クラスターのサイズは r_a の数倍になる。これらのパターンの動的な挙動についてはムービー [142] を参照。

5.3.1 集団パターンの分類

以上のように本モデルでは多様な集団パターンが現れることがわかったので、これらを定量的に分類していく。まず、図 48 に示すように、クラスター初期条件から始めたときクラスターの秩序変数やサイズは経過時間 $\Delta t \sim 100$ 程度で定常状態になる。それぞれの

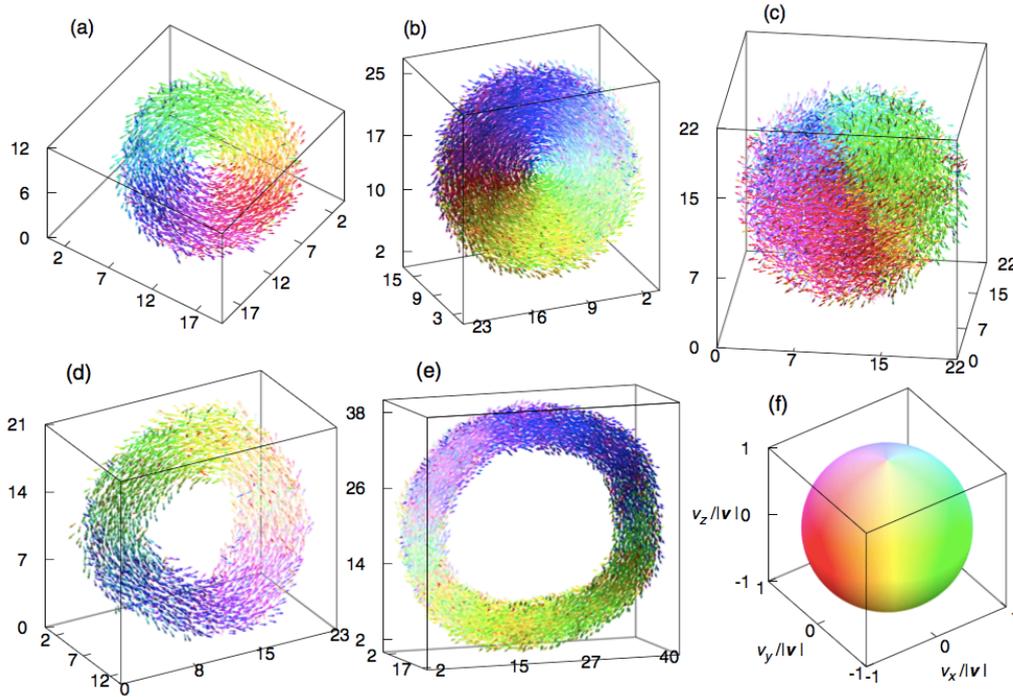


図 46: 回転パターンのスナップショット．各粒子は $2/3$ ($= 1 \text{ BL}$) の長さの矢印で表示され、色は粒子の運動の向き (矢印の向き) に対応する．見やすくするために、シミュレーションボックスの一部を切り出し、座標原点をシフトしている．(a) $N = 3000$, $N_u = 3$, $\lambda = 7.0$ でのトーラス状回転パターン．(b) $N = 10000$, $N_u = 3$, $\lambda = 11.0$ でのトーラス状回転パターン．(c) $N = 10000$, $N_u = 1$, $\lambda = 11.0$ での球状回転パターン．(d) $N = 3000$, $N_u = 3$, $\lambda = 4.5$ でのリング状回転パターン．(e) $N = 10000$, $N_u = 3$, $\lambda = 7.0$ でのリング状回転パターン．(f) 粒子の向き $\hat{\mathbf{v}} = (v_x/|\mathbf{v}|, v_y/|\mathbf{v}|, v_z/|\mathbf{v}|)$ に対応する色相球面． $v_z/|\mathbf{v}| = 0$ では単縦な色相であり、そこから $v_z/|\mathbf{v}| > 0$ では白さが増した色相、 $v_z/|\mathbf{v}| < 0$ では黒さが増した色相になる．

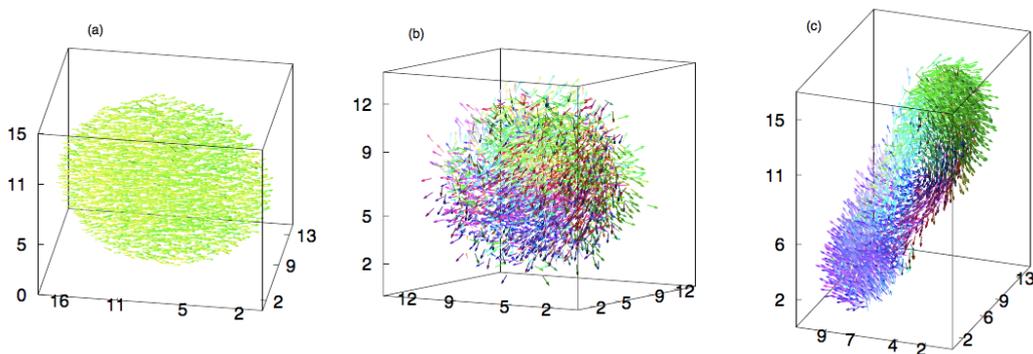


図 47: 回転パターン以外の群れのスナップショット．図示方法は図 46 と同じである．(a) $N = 3000$, $N_u = 3$, $\lambda = 0.5$ での向きの揃った群れ．(b) $N = 3000$, $N_u = 1$, $\lambda = 25.0$ での各粒子が乱雑な向きをとる群れ．(c) $N = 3000$, $N_u = 10$, $\lambda = 9.0$ での動的に形が変形する群れ．

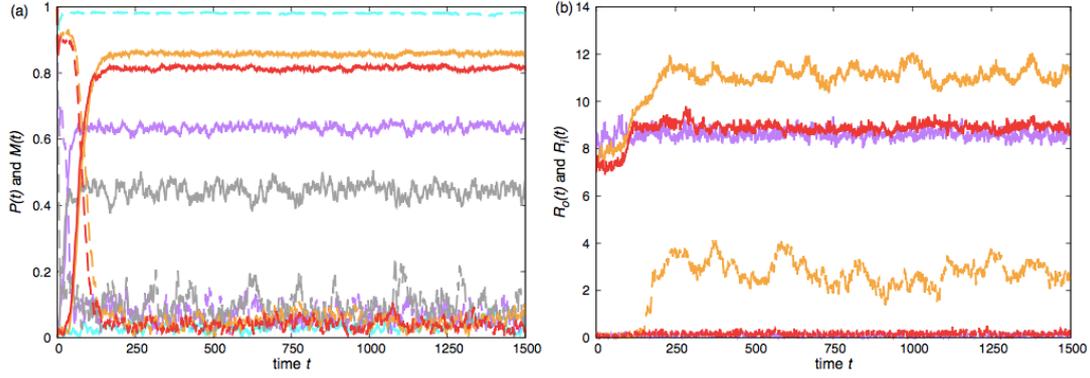


図 48: クラスタ初期条件での $N = 3000$ のクラスタの秩序変数と外径, 内径の時間発展. 水色の線が $N_u = 3, \lambda = 0.5$ での向きの揃った群れ. 灰色の線が $N_u = 1, \lambda = 25.0$ での各粒子が乱雑な向きをとる群れ. オレンジの線が $N_u = 3, \lambda = 5.0$ でのリング状の回転する群れ. 赤の線が $N_u = 3, \lambda = 9.0$ でのトーラス状の回転する群れ. 紫の線が $N_u = 1, \lambda = 7.0$ での球状の回転する群れ. (a) 配向秩序変数 $P(t)$ が破線, 回転秩序変数 $M(t)$ が実線である. (b) 内径 $R_i(t)$ が破線, 外径 $R_o(t)$ が実線である.

量は $t \in [1000, 1500]$ の間で時間平均されパターン分類の評価に使用されるが, 図 48 から $t = 1000$ では定常状態に十分落ち着いていることが確認される.

はじめに, 7つのパターンの名称と定性的な分類を記す. 回転パターンは

- rotating ball: ほぼ球状の回転クラスタで, 主慣性モーメント間の比がほとんど 1 に等しいもの (図 46(c)).
- torus: トーラス状の回転クラスタで, 内径が r_e 以下の中心穴が小さいもの (図 46(a, b)).
- ring: リング状の回転クラスタで, 内径が r_e 以上で中心穴が大きいもの (図 46(d, e)).

非回転パターンは

- polarized school: 各粒子の向きがほぼ揃ったクラスタで, 全体がある方向に運動するもの (図 47(a)).
- swarm: 各粒子の向きが乱雑で, 配向の秩序が小さいもの (図 47(b)).
- splitting: クラスタ初期条件における 1 クラスタが分裂してしまったもの.
- undetermined form: 1 クラスタではあるが, クラスタの形が絶えず変化し, 秩序変数の時間的変動が大きいもの (図 47(c)).

である.

これら 7つのパターンの定量的分類方法を図 49 の樹形図に示す. まず, 図中の記号について述べる. $t \in [1000, 1500]$ における量 $X(t)$ の時間平均を \bar{X} としている. リングを判定するため, 1 回のシミュレーションにおいて $R_i(t) \geq r_e$ となっていた持続時間のうち, 最大のを T_p と定義する. 加えて, Ω_p は粒子平均角速度 $\Omega(t)$ の T_p の持続時間での時間平均である. また, ΔP 及び ΔM は, それぞれ $P(t), M(t)$ の $t \in [1000, 1500]$ に

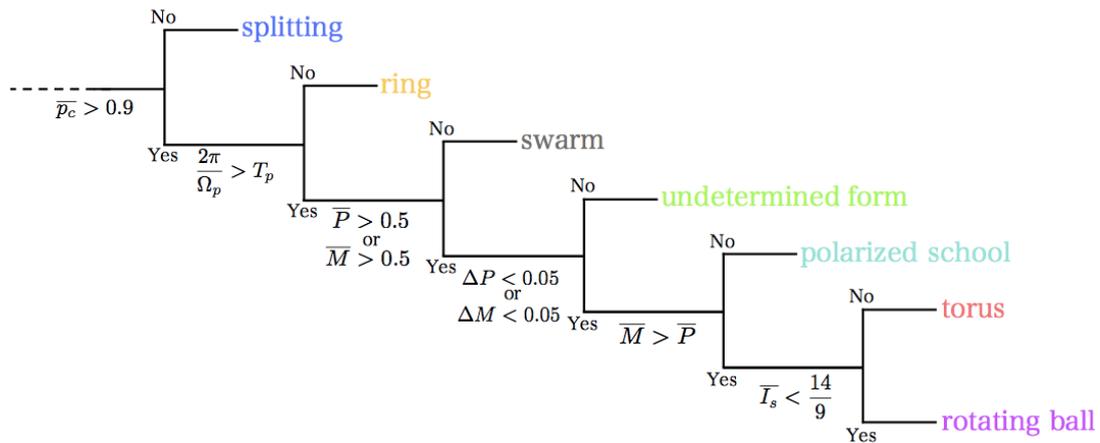


図 49: パターン分類の樹形図. 左から右へ分類が進む.

おける標準偏差である. 図 49 に示した第 1 条件 $\bar{p}_c > 0.9$ は, 1 クラスターが維持されているかどうかを判定する. 第 2 条件は, 粒子の平均周回時間 $2\pi/\Omega_p$ が $R_i(t) \geq r_e$ の持続時間 T_p よりも大きいかどうかを判定する. $2\pi/\Omega_p < T_p$ の場合, 粒子が 1 周する間リングが維持されていると判定できる. 第 3 条件は, クラスターに配向と回転の秩序のどちらかが存在するかを判定する. 第 4 条件は, 配向と回転の秩序の揺らぎが存在するかを判定す

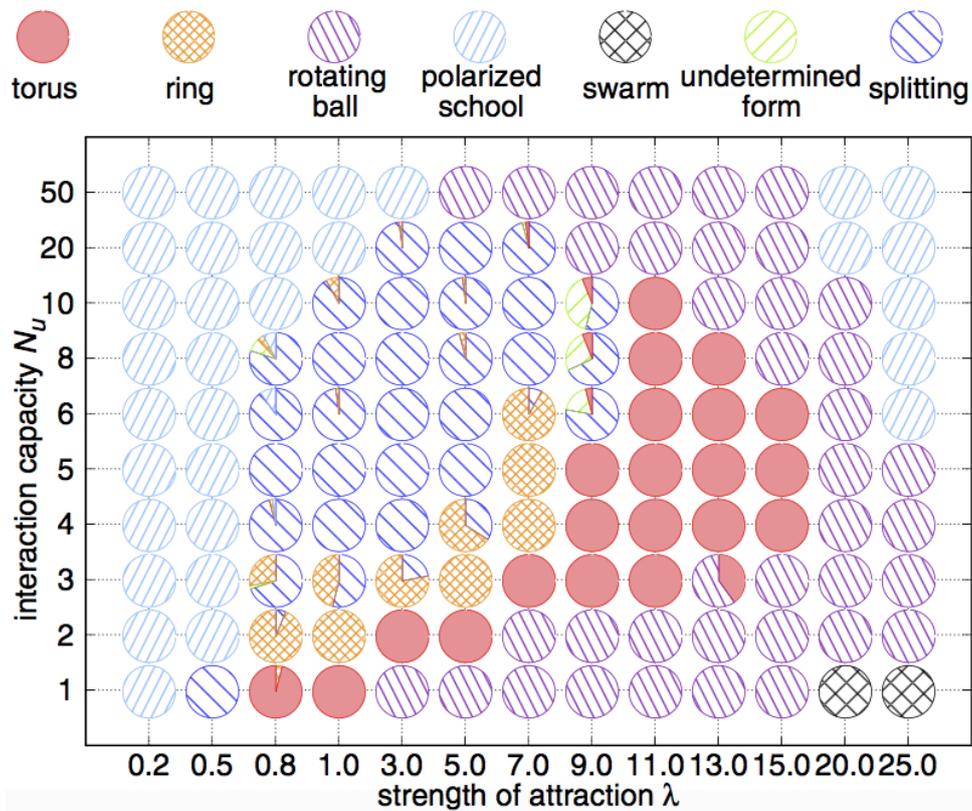


図 50: クラスター初期条件を使用したときの $N = 3000$ におけるパターンの相図. それぞれの円グラフは, パラメタセット (λ, N_u) において 50 回シミュレーションしたときの各パターンの出現頻度を表している.

る。ここで、0.05 という判定のしきい値は、polarized school や rotating ball, torus では $\Delta P, \Delta M = 0.001-0.01$ の範囲に収まっていることからくる。第 5 条件は、回転の秩序があるかを判定する。第 6 条件は、クラスターの形状が球状かどうかを判定する。14/9 という値は式 (53) に由来する。

5.3.2 集団パターンの相図

上記の集団パターンの分類方法を用いて、引力の強さ λ と相互作用相手の最大数 N_u を変えたときの、 $N = 3000$ での出現パターンの割合を示したのが、図 50 である。各パラメータに対して 50 回シミュレーションを行ったときのパターンの出現頻度を円グラフで示している。統一的なシミュレーションを実行するため、クラスター初期条件を用いた。各粒子の向きが揃ったクラスター初期条件を使用したにも関わらず、幅広い (λ, N_u) パラメータ領域で回転パターン (rotating ball, torus, ring) が出現することがわかる。特に、傾向としては比較的小さい N_u と大きい λ で出現する。また、 λ を上昇させると、引力によって凝集能力が高まり、ring→torus→rotating ball というようにクラスターの渦軸に垂直な方向への広がり小さくなっていく。加えて、このようなパラメータ領域 (λ, N_u) は、5.1.1 節で示した実験から見積もられる $\lambda \sim \mathcal{O}(1)-\mathcal{O}(10)$ 、及び $N_u \lesssim 3$ という値によく一致していると言える。一方で、polarized school は比較的大きい N_u と小さい λ で出現する。

このようなパラメータ依存性は、定性的には次のように説明できる。まず、 N_u が小さい場合、少数の粒子の情報を用いて斥力や配向相互作用を行うため、周囲の粒子の向きなどの

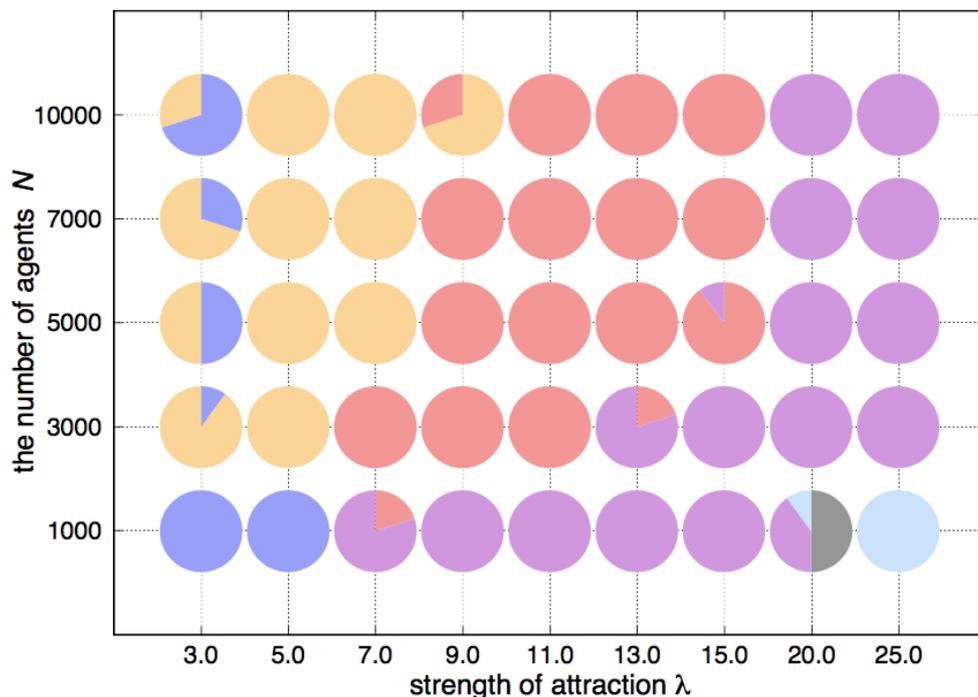


図 51: クラスター初期条件を使用したときの $N_u = 3$ におけるパターンの相図。パターンと色の対応は、図 50 と同じである。円グラフは (λ, N) において 10 回シミュレーションしたときの各パターンの出現頻度を表している。

変化に鋭敏に反応できるようになる。つまり、運動方程式(式(40))の斥力、配向相互作用項における目標速度 $\sum_{j \in \mathcal{L}_i} v_r \hat{r}_{ij} / |\mathcal{L}_i|$, $\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \mathbf{v}_j / |\mathcal{L}_i|$ が、少数の粒子の平均値として現れるため、個々の粒子の情報が強い影響を及ぼす(逆に N_u が大きい場合は、多数の粒子の平均によって個々の粒子の情報の重みが小さくなる)。続いて、 λ が大きい場合は、単純にクラスターの内側に入り込もうとする効果が強くなるため、結果として回転を促進するようになる。

また、 $N_u = 3$ における粒子数を $N = 1000-10000$ とした場合のパターン相図を図 51 に示す。この場合も、広いパラメタ領域 (λ, N) で回転パターンが出現するが、特に粒子数が多いときの方が ring や torus が出現しやすい。

5.4 クラスターのサイズ

本節ではクラスターのサイズを示す。図 52(a) は $N = 3000$ の回転パターンの外径 \bar{R}_o を N_u の関数としてみたものである。 $N_u = 2-3$ にピークが存在し、そこから N_u を大きくすると外径は減少し続ける。ピークの位置は球状からトーラス状へ変形する過程での N_u の値に対応する。特に $N_u = 50$ においては、すでに $2\bar{R}_o \approx r_a (= 5)$ でクラスター直径が最大相互作用半径と同等になっている。この結果は、 $N_u \rightarrow \infty$ の極限に対応するメトリック相互作用型モデル(4.1節)による回転パターンのサイズが、相互作用半径より小さいことと照応する。また、主慣性モーメントの比 \bar{I}_s (式(51))は $N_u = 5$ 程度にピークを持つ。特に、 $N_u = 1$ においては、 \bar{I}_s が 1 に近いので極めて球形に近い。

続いて、図 53(a) は $N_u = 3$ における外径と内径の N, λ 依存性である。図 51 において、ring と torus の出現する境目の λ から、 λ を小さくしていくと \bar{R}_i がゼロではない有限の値を持ち始め、確かに中心に大きな穴の空いたクラスターができていくことが確かめられる。実験との定性的対応を見てみると、3000 匹のイワシの回転する群れの内径と外径はそれぞれ 1-2 BL, 13-17 BL であるが [6]、これはおおよそ $N = 3000, N_u = 3, \lambda = 7.0$ での内径 1 BL と外径 15 BL に対応する(体長を長さの単位とすると図 53(a) に示した長

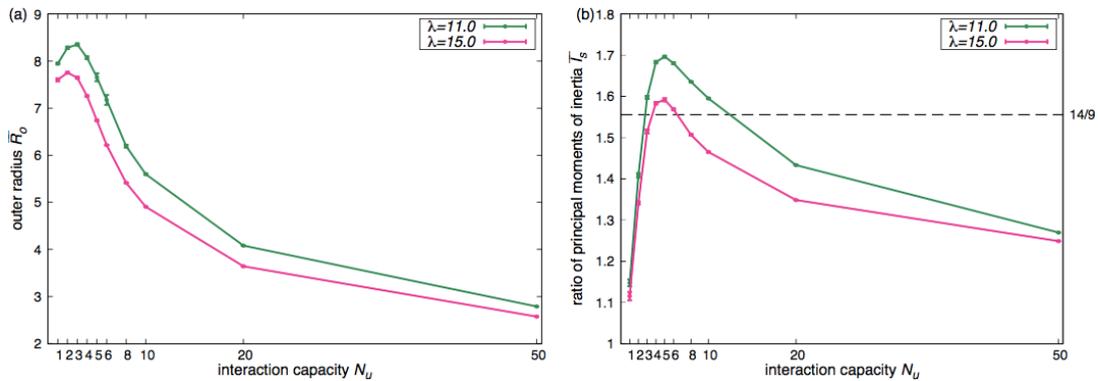


図 52: $N = 3000$ の回転パターンにおける N_u の関数としてのクラスター形状。それぞれ時間平均した量の 10 回のシミュレーションにおける平均値と、その標準偏差としてのエラーバーを付す。(a) 外径 \bar{R}_o , (b) 主慣性モーメントの比 \bar{I}_s を示す。(b) において $14/9$ は式(53)による、torus($\bar{I}_s > 14/9$)と rotating ball($\bar{I}_s \leq 14/9$)判別のしきい値である。

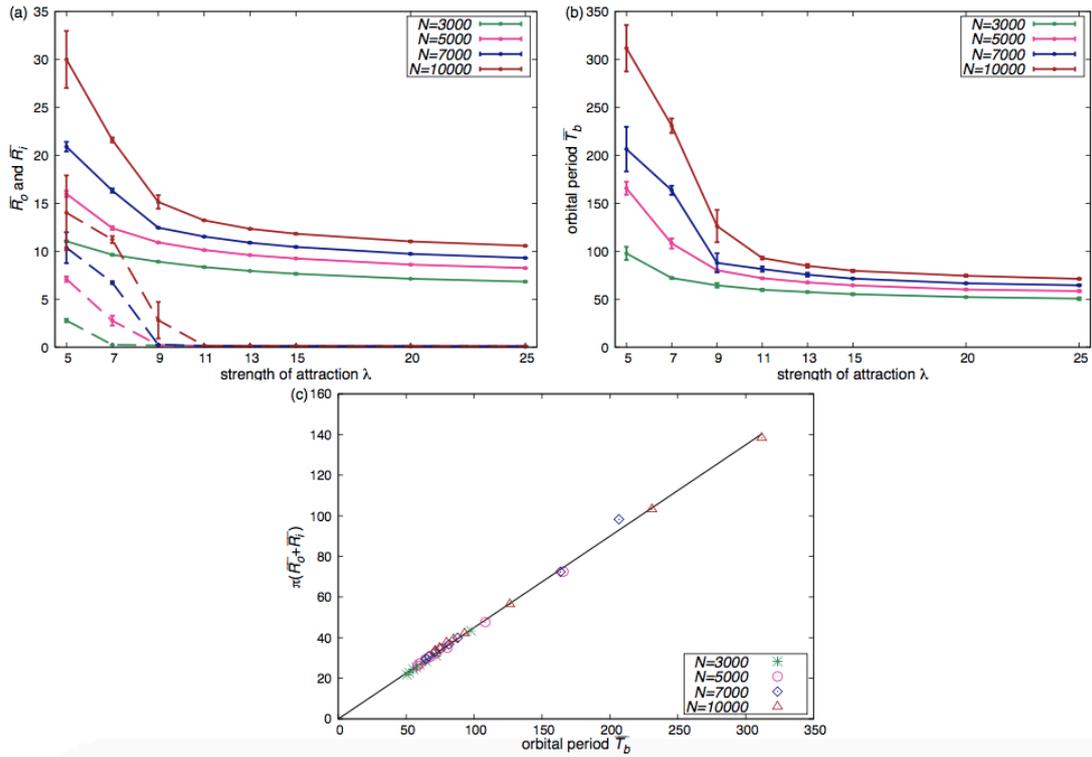


図 53: $N_u = 3$ でのクラスタのサイズと各粒子の回転周期の N , λ 依存性. 図 52 と同様にエラーバー等を付す. (a) 外径 \bar{R}_o が実線, 内径 \bar{R}_i が破線である. (b) 各粒子の回転周期の平均 \bar{T}_b . (c) クラスタの平均周長 $2\pi(\bar{R}_o + \bar{R}_i)/2$ と \bar{T}_b の関係. 実線はフィッティング線 $\pi(\bar{R}_o + \bar{R}_i) = v\bar{T}_b$ で $v = 0.45$ である.

さは 1.5 倍になることに注意).

5.4.1 サイズと粒子数のスケーリング則

このように, オーダーとしては魚の群れのサイズに匹敵することがわかったので, ここでは定量的な実験との比較を行う. 図 51 を参考に, 回転パターン (特に torus, rotating ball) が幅広い粒子数で出現する $N_u = 3$, $\lambda = 11.0$ で, $N = 350$ から 15000 まで変化させたときの系の挙動を図 54 に示す. 実際, 図 54(a) によれば, 回転秩序変数 \bar{M} は 0.5 以上を保っており回転パターンであることが確認され, かつ, 図 54(b) から内径 \bar{R}_i はゼロ近くを保ったまま外径 \bar{R}_o のみが増大していることがいえる. また, 先行研究との比較では, 先行モデルでは粒子数を多くしていくと回転秩序変数 \bar{M} は 200 粒子程度でピークを迎え, そこからは減衰していく一方なのに対し [131, 132], 本モデルでは粒子数が増加すると \bar{M} は増大し続けることがわかる. 加えて, ポテンシャル型モデル (4.1.1 節) とは違い, 粒子数が増加すればクラスタサイズも増大する自然なモデルになっていると言える.

上記のパラメータ値を用いて, クラスタの渦軸に垂直な方向への射影面積 $\overline{\pi R_o^2}$ を幅広い粒子数の範囲で測定する. ここで, 式 (46) に基づき, 渦軸は回転秩序変数ベクトル $\mathbf{M}(t)$ が向いている方向とし, その単位ベクトルを $\mathbf{e}_M(t) = \mathbf{M}(t)/|\mathbf{M}(t)|$ と定める. このとき, 射影面積 $\overline{\pi R_o^2}$ と粒子数の関係を両対数グラフにプロットすると, 線形関係にある

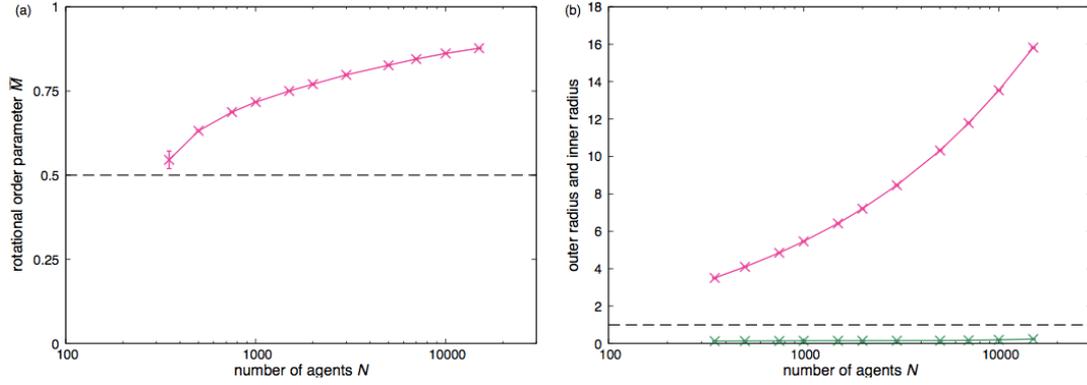


図 54: $N_u = 3$, $\lambda = 11.0$ での回転秩序変数と外径，内径の粒子数依存性．図 52 と同様にエラーバー等を付す．粒子数は $N = 350, 500, 750, 1000, 1500, 2000, 3000, 5000, 7000, 10000, 15000$ と変化する．(a) 回転秩序変数 \bar{M} ．破線 $\bar{M} = 0.5$ は回転パターンか polarized school かを判別するしきい値である．(b) 緑の線が外径 \bar{R}_o ，マゼンタの線が内径 \bar{R}_i ．破線 $\bar{R}_i = r_e$ は ring かその他の回転パターンかを判別するしきい値である．

ことがわかる (図 55(a))．そこで，

$$N \propto (\pi \bar{R}_o^2)^\nu \quad (54)$$

としてフィッティングを実行すると，

$$\nu = 1.283 \pm 0.004 \quad (55)$$

を得る．もしクラスターが一様な円板状であれば $\nu = 1$ となり，球状であれば $\nu = 3/2 = 1.5$ になるので， $\nu = 1.283$ という値は円板と球の中間の形状を意味する．一方で，実際のニシンやサバの群れでの観測では，粒子数を群れ全体の重さに置き換え (各個体の重さはほぼ一定と仮定すると，群れ全体の重さは個体数に比例する)，水平面への射影面積との関係を見ると，(重さ) \propto (水平投影面積) $^{\nu_e}$ を満たし

$$\nu_e = 1.329 \quad (56)$$

となることがわかっている (図 55(b)) [143]．

このように，本モデルによるべき指数 ν と実験値 ν_e はよく一致していると主張でき，実験系と定量的な比較をしたという点が本研究の特色である．

5.5 回転クラスター中の粒子の運動

回転クラスター中の個々の粒子の運動について考える．まずは，測定のための諸量を定義する． x 軸方向の単位ベクトル e_x を渦軸方向の単位ベクトル $e_M(t)$ に垂直な平面に射影したときの (規格化を施した) ベクトルを

$$e_1^\perp(t) = \frac{(I - e_M(t) \otimes e_M(t))e_x}{|(I - e_M(t) \otimes e_M(t))e_x|} \quad (57)$$

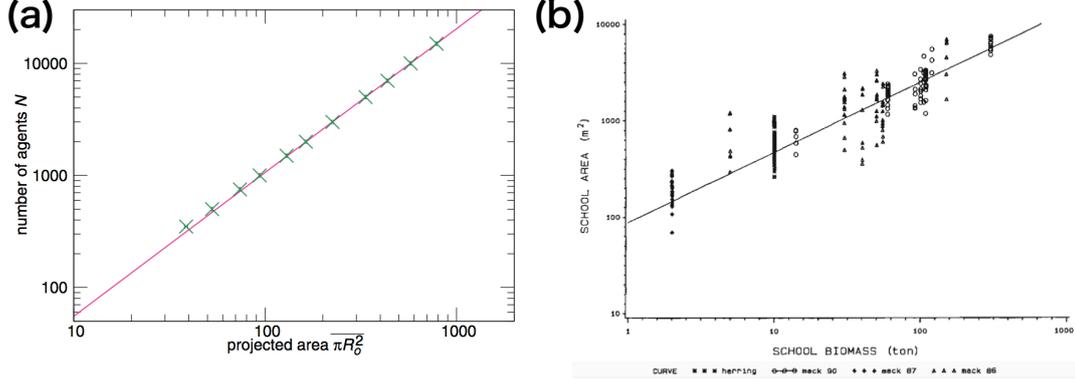


図 55: 群れのサイズに関するスケーリング関係. (a) $N_u = 3$, $\lambda = 11.0$ での射影面積 πR_o^2 と粒子数 N の関係. フィッティング線は, $N \propto (\pi R_o^2)^\nu$ で, $\nu = 1.283$ である. (b) ニシン (herring) とサバ (mackerel) の群れの重さと水平投影面積の関係 [143]. フィッティング線は, (重さ) \propto (水平投影面積) $^{\nu_e}$ で, $\nu_e = 1.329$ である. 図 (b) は [143] より許可を得て転載.

とする. ここで, I は恒等行列, \otimes はテンソル積である. さらに, $\mathbf{e}_M(t)$ と $\mathbf{e}_1^\perp(t)$ に垂直なベクトルとして,

$$\mathbf{e}_2^\perp(t) = \mathbf{e}_M(t) \times \mathbf{e}_1^\perp(t) \quad (58)$$

を用意する. 群れの重心を原点として, これら 3 つのベクトル $\{\mathbf{e}_M(t), \mathbf{e}_1^\perp(t), \mathbf{e}_2^\perp(t)\}$ を基底ベクトルとすれば, 回転クラスターに一意に座標を張ることができる. 回転軸に垂直な平面上での粒子の位置を

$$\mathbf{c}_i^\perp(t) = (c_{i,1}^\perp(t), c_{i,2}^\perp(t)) = (\mathbf{c}_i(t) \cdot \mathbf{e}_1^\perp(t), \mathbf{c}_i(t) \cdot \mathbf{e}_2^\perp(t)) \quad (59)$$

とし, 回転軸まわりの方位角を

$$\phi_i(t) = \tan^{-1} \left(\frac{c_{i,2}^\perp(t)}{c_{i,1}^\perp(t)} \right) \in [-\pi, \pi] \quad (60)$$

とする. 一周したとき, $\phi_i(t)$ が $-\pi$ から π (またはその逆) にジャンプすることを利用して, 回転クラスター中の各粒子の周回周期 $T_{b,i}$ を求める. そして, 時間平均を取ったもの $\bar{T}_{b,i}$ を全粒子について平均したものを \bar{T}_b と定める.

図 56 は, ある粒子の $c^\perp(t)$ 及び, $c_1^\perp(t) = c^\perp(t) \cos \phi(t)$ の時間発展の様子である. $c^\perp(t)$ から, (a) の ring の場合も, (b) の torus の場合もどちらも, 粒子が外径と内径の間を行ったり来たりしていることがわかる. これは, ポテンシャル型モデル (4.1.1 節) で出現する剛体回転するクラスターとは大きく異なる点である [25]. $c_1^\perp(t)$ の挙動を見れば, おおよそ $100\tau_0$ のタイムスケールで周回していることがわかるが, 実際に平均の周回周期 \bar{T}_b を測定したのが, 図 53(b) である. λ を下げ rotating ball, tours, ring と変化していくにつれ周回周期は上昇し, 10000 粒子では $300\tau_0$ にまで達している. また, 図 53(c) はクラスターの平均周長 $2\pi(\bar{R}_o + \bar{R}_i)/2$ と周回周期 \bar{T}_b の関係を示す. 線形の関係であるので, λ の大きさによらず, 粒子はクラスター中を一定の速度で進んでいることがわかる. そこで

$$\pi(\bar{R}_o + \bar{R}_i) = v\bar{T}_b \quad (61)$$

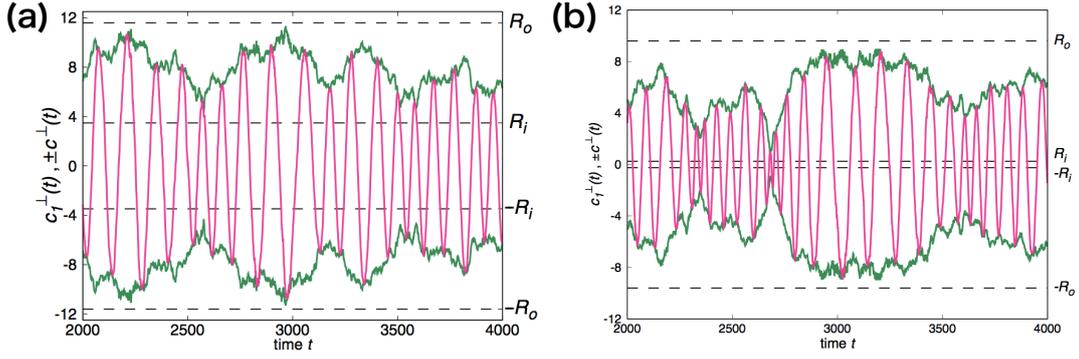


図 56: $N = 3000$, $N_u = 3$ での, ある粒子の動径距離 $c^\perp(t)$ と $c_\perp^\pm(t)$ の時間発展. クラスタ初期条件を使用して, $t = 2000$ から 4000 まで測定. 上の緑の線が $c^\perp(t)$, 下の緑の線が $-c^\perp(t)$, マゼンタの線が $c_\perp^\pm(t)$ である. 破線は $t \in [2000, 4000]$ における $\pm R_o(t)$, $\pm R_i(t)$ の時間平均値を示す. (a) $\lambda = 4.5$ の場合 (ring). (b) $\lambda = 7.0$ の場合 (torus).

として, フィッティングを実行すると $v = 0.45$ となり, おおよそ v_0 の半分の値を示すことがわかった. この値は, 自己推進と斥力の競合という点から説明可能である. 前方の粒子と衝突しそうになると, 粒子はおおよそ $v_0 - v_r = 0$ で減速しようとするが, 一方で後方の粒子と衝突しそうになると $v_0 = v_r$ で前進しようとする. 従って, 平均的には $v_0/2$ 程度の速度で推進する.

5.5.1 動径方向の運動の時間相関

図 56 でみた粒子の動径方向の運動の特徴を捉えるために, $c^\perp(t)$ の時間自己相関関数を次式で定義する:

$$G(\Delta t) = \frac{1}{|C(t)|} \sum_{i \in C(t)} \left(\langle c_i^\perp(t + \Delta t) c_i^\perp(t) \rangle - \langle c_i^\perp(t) \rangle^2 \right). \quad (62)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は時間平均を表し, $t \in [2500, 12500]$ において平均する. また, $G(\Delta t = 0) = 1$ となるように規格化を施す. もし, 動径方向の運動がブラウン運動で近似されるのであれば, 自己相関関数は指数関数的に減衰するはずである [10].

図 57 に λ を変化させたときの $G(\Delta t)$ を示す. これより, 相関関数は指数関数より早く減少することがわかり, 特に λ が大きい場合にその傾向が顕著である. このような挙動は斥力や配向相互作用によるブラウン運動に加え, 何らかの擾乱が作用していることを示唆している. そのひとつの理由として, 渦軸の運動による擾乱の発生が考えられる (付録 C を参照). 渦軸が運動することによる動径方向の移動距離は, 式 (C.17) に基づけばクラスタのアスペクト比 (半径/高さ) に依存する. つまり, アスペクト比の小さいクラスタほど動径距離のシフト量は大きくなるが, このような低アスペクト比のクラスタは大きい λ で実現される.

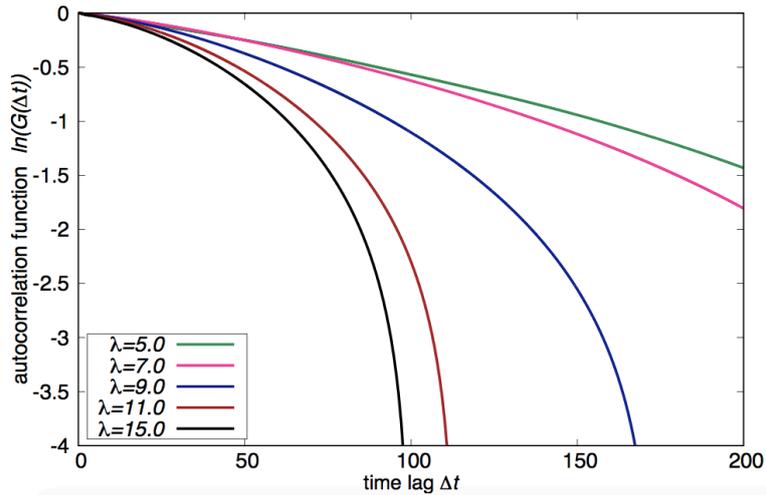


図 57: $N = 3000$, $N_u = 3$ での λ を変化させた場合の自己相関関数 $G(\Delta t)$. (片対数プロット)

5.5.2 ring のちぎれと再生

相図 (図 50, 図 51) における ring と splitting の境目について補足する. まず, ring からどのように splitting に移行するかを見る. ring はパラメタによっては時々ちぎれを引き起こす. というのは, (斥力) 相互作用による粒子密度の揺らぎの影響で ring の一部分が細くなることがあり, λ が小さい場合, その細くなった部分のちぎれを引力相互作用によってつなぎとめることができないことがある. このちぎれが起こったとき, (環の一部を切って開くイメージで) ring は棒状のクラスターに変形していく. このときさらに, 棒状クラスターがちぎれて分裂してしまうというのが ring から splitting への移行のシナリオである. 一方で, 棒状クラスターをつなぎとめておくことができた場合は, 再び回転し始め ring が再形成される (動画も参照 [142]).

相図を作成する上で問題となるのは, そもそも ring のちぎれがいつ起こるかということに不定性が存在する点である (図 58). しかし, このちぎれが起こる時間間隔のタイムスケールは $1000\tau_0$ から $10000\tau_0$ のオーダーであり, これは回転周期 $\bar{T}_b \sim 100\tau_0$ の数十倍から数百倍に及ぶ. 従って, ring は粒子が数十回から数百回周回する程度には安定であり, 直ちにちぎれてしまうわけではないことは言及に値する.

また, ちぎれが起こった場合, 分裂がいつ生じるのか予測がつかないという点も問題となる. 図 59 は, ちぎれが 4 回起こった後, 5 回目のちぎれで分裂した例である. この例からもわかるようにちぎれが起こったからといって必ずしも, splitting につながるというわけではない. 従って, 相図 (図 50, 図 51) 作成時に使用したシミュレーションのタイムスケール $t = 1500$ は, ring と splitting を区別するという点では, ある程度定性的なタイムスケールに過ぎないことに注意しなければならない.

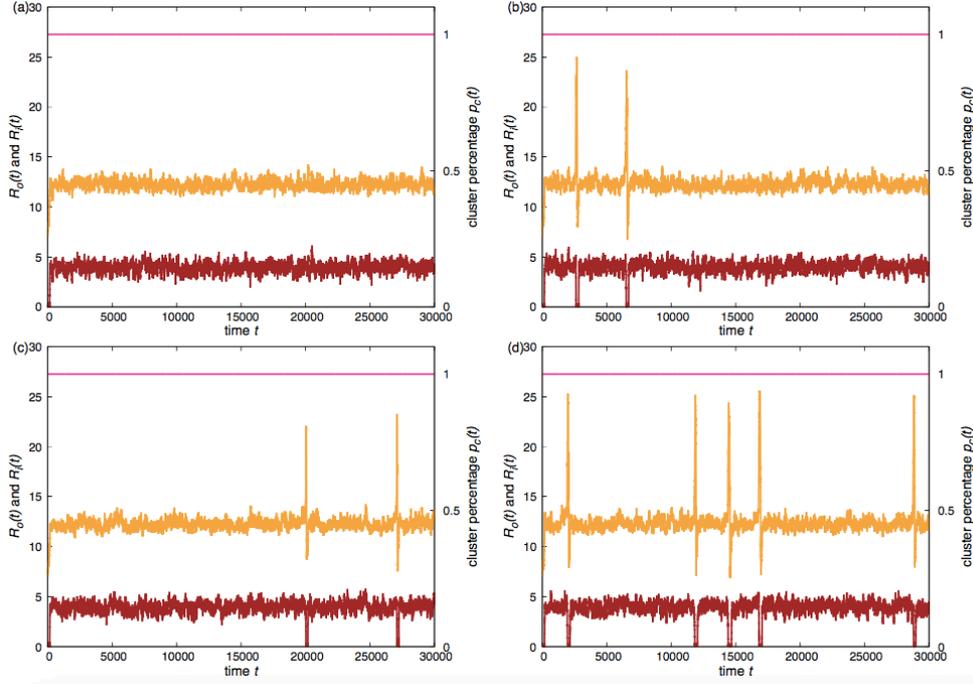


図 58: $N = 3000$, $N_u = 3$, $\lambda = 4.0$ における, ちぎれの発生間隔の例. 外径 $R_o(t)$ (オレンジの線) と内径 $R_i(t)$ (茶色の線), $p_c(t)$ (マゼンタの線) の時間発展を示す. (a) $0 \leq t \leq 30000$ のシミュレーションにおいて, 1 度もちぎれが起こらない例. (b)-(d) それぞれ異なるタイミングで, $R_o(t)$ のスパイクに対応するちぎれが何度か起こる例.

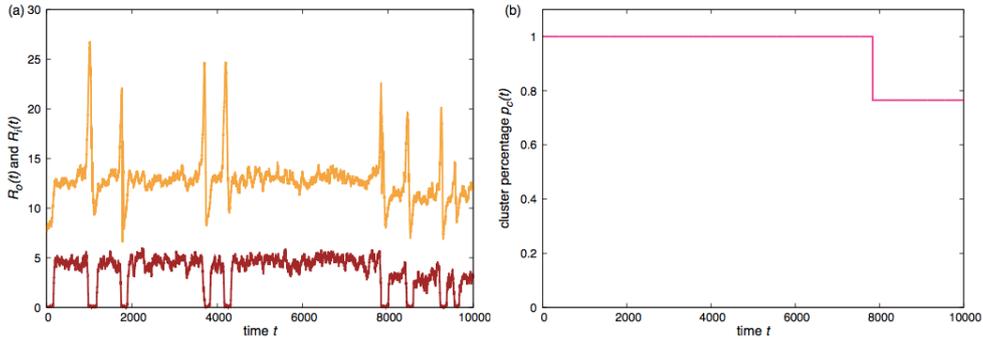


図 59: $N = 3000$, $N_u = 3$, $\lambda = 3.5$ における, ring のちぎれと splitting への移行の例. (a) 外径 $R_o(t)$ (オレンジの線) と内径 $R_i(t)$ (茶色の線) の時間発展. (b) 最大クラスターに含まれる粒子数の割合 $p_c(t)$ の時間発展. $t \sim 5000$ まで, $R_o(t)$ のスパイクに対応してちぎれと ring の再生を 4 回繰り返す, $t \sim 8000$ において最大クラスターに含まれる約 20% の粒子数が失われる分裂が起こる.

5.6 回転パターンの内部構造

最後に, 回転パターンの内部構造を調べるため動径方向の分布関数を考える. まずは, 数密度分布関数を

$$\tilde{\rho}(c^\perp, t) = \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \frac{\delta(c_i^\perp(t) - c^\perp)}{c^\perp} \quad (63)$$

として定義する．ここで， $\delta(o)$ はディラックのデルタ関数である．数値計算的には， $\Delta c^\perp = 0.01$ の幅のビンを使用し，デルタ関数は区間 $[c^\perp, c^\perp + \Delta c^\perp]$ に入っている粒子数で置き換える．さらに，これを

$$\rho(c^\perp, t) = \frac{\tilde{\rho}(c^\perp, t)}{\int_0^\infty dc^\perp c^\perp \tilde{\rho}(c^\perp, t)} \quad (64)$$

とすれば，規格化された数密度分布関数を得る．これを時間平均したものを $\bar{\rho}(c^\perp)$ と書く．

続いて， r_e 以内の相互作用している粒子数の指標，あるいは引力がオンになっているかオフになっているかの指標として， $\eta_i(t) = |\mathcal{L}_i(t)|/N_u$ という量を定義する．定義より， $0 \leq \eta_i(t) \leq 1$ であり， $\eta_i(t) < 1$ の場合には，その粒子に引力相互作用が生じていることを意味する．

$$\eta(c^\perp, t) = \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} \eta_i(t) \delta(c_i^\perp(t) - c^\perp) \quad (65)$$

が分布関数となる．ただし，和は $\rho(c^\perp, t) > 0$ の場合のみ取ることにする．というのも，和に $\rho(c^\perp, t) = 0$ の場合も含めると， $\eta_i(t) = 0$ を持つ粒子が存在したことになってしまい物理的意味をなさないからである．また，全く同様に速さの分布関数

$$V(c^\perp, t) = \sum_{i \in \mathcal{C}(t)} |\mathbf{v}_i(t)| \delta(c_i^\perp(t) - c^\perp) \quad (66)$$

も定義する．

図 60 に示すように，数密度分布 $\bar{\rho}(c^\perp)$ は λ の上昇に伴って，範囲が狭くなっていくことがわかる．これは単純に引力によって凝集能力が高まっていることを意味する．また，torus, ring で $\bar{\rho}(c^\perp)$ にピークが存在するのは自明のものであるが (図 60(a))，rotating ball にもピークが存在することは興味深い (図 60(b))．これは定性的には次のように理解できる：渦軸付近ではすぐ隣に反対の向きを持った粒子がいるので，配向相互作用で向きが乱れ，さらに斥力によって弾き飛ばされる．つまり，渦軸付近に粒子は近づき難く，数密度が小さくなる．

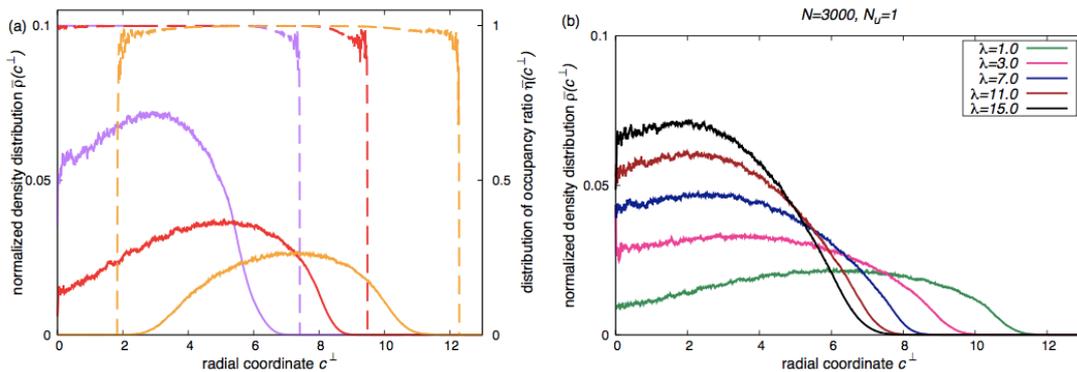


図 60: 動径方向の数密度分布 $\bar{\rho}(c^\perp)$ 及び，引力が働いている粒子の割合 $\bar{\eta}(c^\perp)$ ．(a) $N = 3000$, $N_u = 3$ での $\bar{\rho}(c^\perp)$ (実線) と $\bar{\eta}(c^\perp)$ (破線)．オレンジの線が ring ($\lambda = 5.0$)，赤の線が torus ($\lambda = 9.0$)，紫の線が rotating ball ($\lambda = 25.0$) に対応する．(b) $N = 3000$, $N_u = 3$ での $\bar{\rho}(c^\perp)$ ． $\lambda = 1.0$ のみ torus で，それ以外は rotating ball．

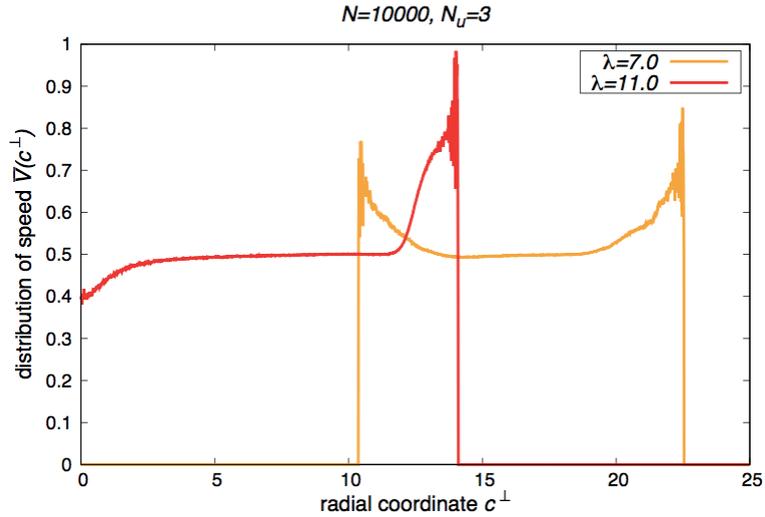


図 61: $N = 10000$, $N_u = 3$ での速度分布 $\bar{V}(c^\perp)$. オレンジの線が ring に, 赤の線が torus に対応する.

続いて, 図 60(a) から, 引力が作用している粒子の位置がわかる. クラスターの内側では $\bar{\eta}(c^\perp) = 1$ のため, 粒子には引力が働いておらず, $\bar{\eta}(c^\perp) < 1$ となるのは厚さ $r_e = 1$ 程度のクラスター表面付近においてである. 従って, 表面付近にいる粒子による引力のみによって, クラスターが斥力によって分離してしまうのを抑えている状況であり, これはすべての粒子が引力相互作用をしているポテンシャル型モデル (4.1.1 節) とは異なる. 3.2.3 節で見たように, fast-start は群れの境界付近にいる個体が主に行う行動であるため [5], 本モデルはそれを反映していると言える.

図 61 は速度分布 $\bar{V}(c^\perp)$ を示す. 引力の影響でクラスター表面付近では速度が上昇するものの, クラスター内部では配向相互作用によってほとんど一定の値をとっている. 実際の 3000 匹のイワシの群れでは速度は動径距離の (線形) 増加関数になっており [6], 本モデルではその再現までには至っていない. 複数の自己推進速度を持つ粒子を用意した先行モデル [126] では, 自己推進速度が大きいものほど回転パターンの外側に位置するため, 本モデルでも v_0 にヘテロ性を持たせれば, 速度分布を再現できる可能性がある.

6 魚群集団運動に対する重力場の効果

本章の結果は著者らの論文 [144] に基づく。(S. Ito and N. Uchida, Effect of gravitational field on collective motion of fish, *EPL* **138**, 17001 (2022). doi:10.1209/0295-5075/ac6621 より許可を得て図表を転載。)

本章では、重力場の効果を導入した際のクラスターの形状変化等を検証するため、モデル化を行う。

6.1 重力場の効果のモデル化

魚 (広くは脊椎動物) は、耳の耳石と呼ばれる器官で重力場を感知し体の平衡感覚を保っている [145]。この効果を反映させるため、基礎方程式 (40) に鉛直方向への速度の減衰効果を加え、粒子を水平方向へ向かわせる項を導入する。

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = & (v_0 - |\mathbf{v}_i|)\hat{\mathbf{v}}_i + \frac{1}{|\mathcal{L}_i|} \sum_{j \in \mathcal{L}_i} g(|\mathbf{r}_{ij}|)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \\ & + \frac{1}{|\mathcal{L}_i|} \sum_{j \in \mathcal{L}_i} g(|\mathbf{r}_{ij}|)(v_r \hat{\mathbf{r}}_{ij} - \mathbf{v}_i) + \frac{\Lambda_i(t)}{|\mathcal{A}_i|} \sum_{j \in \mathcal{A}_i} (v_a \hat{\mathbf{r}}_{ji} - \mathbf{v}_i) - \zeta v_{z,i} \mathbf{e}_z \quad (67) \end{aligned}$$

ここで、重力場は z 軸に平行であるとし、 \mathbf{e}_z は鉛直方向 (z 方向) 上向きの単位ベクトル、 ζ は重力感知の強さを表すパラメタであり、速度の z 成分 $v_{i,z}$ が τ_0/ζ のタイムスケールでゼロに減衰する。その他の点については、式 (40) と同様である。

本モデルでは、各パラメタは $r_e = 1$, $r_a = 5$, $r_b = 2/3$, $v_0 = 1$, $v_r = 1$, $\tau_0 = 1$, $v_a = 5$, $\tau = 0.1$ で重力場の効果のないときと同じリスケールされた値を採用する。本章では、 $N = 3000$ を使用し、重力場がない場合のパターン相図 (図 50) で回転パターンが出現した $1 \leq N_u \leq 3$, $5.0 \leq \lambda \leq 9.0$ を ζ を変数として集中的に調べる。数値積分は $dt = 0.005$ の時間刻みで 4 次のルンゲ・クッタ法を用いる。シミュレーションボックスは x, y 方向の辺長が $L = 40$, z 方向の高さが $L_z = 50$ の直方体とし、周期境界条件を課す。また、特に断りがなければクラスター初期条件を使用する。

6.2 集団パターンの鉛直伸長

はじめに、集団パターンにおける重力場の効果を検証する。図 62 は $t = 3000$ における定常状態のスナップショットである。(a)~(d) は $N_u = 1$ において ζ を増加させたときの回転パターンの形態変化で、球状から円柱状へと鉛直方向への伸長を起こすことがわかる。この円柱状パターンは自然界で観測されている魚群パターンであるが (図 3(d)) [7], ゾーン型モデル (4.1.2 節) に重力場の効果を入れた向きの揃った群れの先行モデル [146] では出現しなかったパターンである。定性的には鉛直方向への伸長は以下のように説明できる。水平方向には粒子が自由に運動できるのに対し、鉛直方向には運動が制限されるため、引力による鉛直方向への凝集効果が相対的に低くなり、鉛直方向により大きく広がるが可能になる。

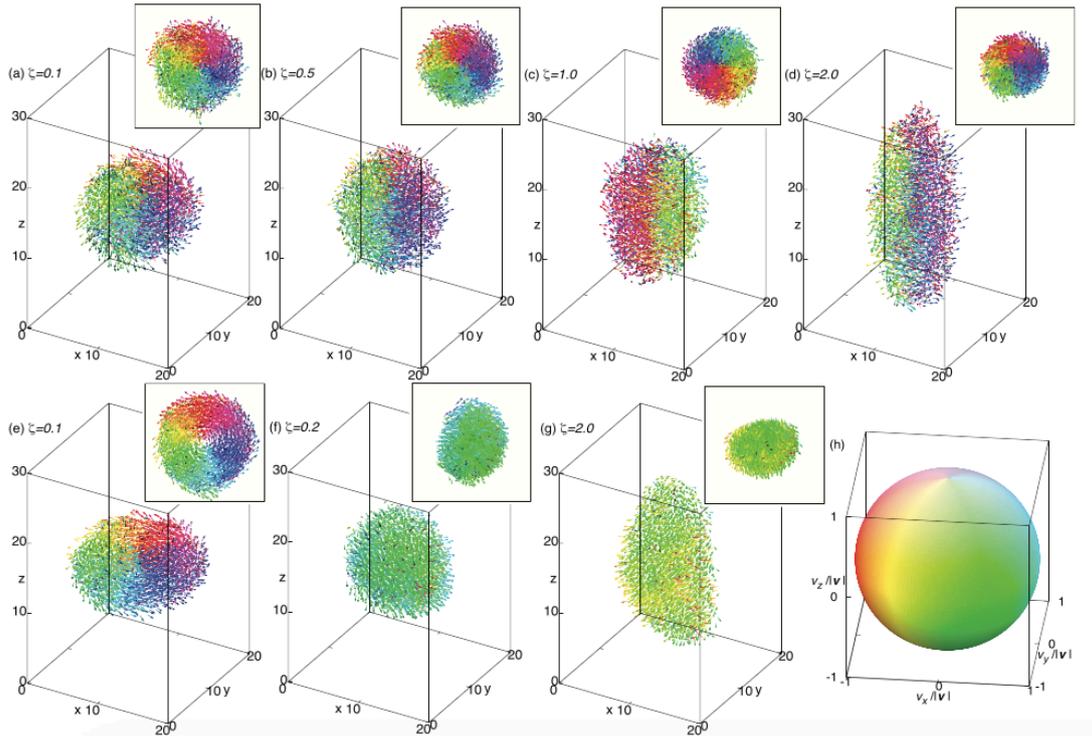


図 62: 重力場下における集団パターンのスナップショット ($t = 3000$)。図示方法は図 46 と同様である。各パネル右上の挿入図は、上方 (z 軸方向) から見た上面図を示す。(a)~(d) $N_u = 1, \lambda = 9.0$ における回転パターン。 ζ は左から順に 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 である。(e)~(g) $N_u = 3, \lambda = 9.0$ における回転パターンおよび polarized school。 ζ は左から 0.1, 0.2, 2.0 である。(h) 粒子の向きと色の対応を示す色相球面 (図 46(f) と同様)。

一方、図 62(e)~(g) では、 $N_u = 3$ の回転パターンが ζ の増加に伴って polarized school に移行することがわかる。これは、鉛直方向には向きがすでに揃っているため、相対的に水平方向への配向相互作用がよく効き、 N_u が大きい場合には整列パターンが安定化したためと考えられる。

また、位置、向き共にランダムなランダム初期条件を用いても、同様のパターンが出現することが確認された。集団の動的な挙動については動画 [147] を参照されたい。

6.2.1 回転パターンの出現頻度の ζ 依存性

具体的にどのようなときに回転パターンが出現し、polarized school に移行するのを見る。まず、配向秩序変数と回転秩序変数の関係が $\overline{P} < \overline{M}$ であるとき、回転パターンが出現したと定義する。ここで、ある量 $X(t)$ の時間平均 \overline{X} は $t \in [2500, 3000]$ で評価する (重力場がないとき (5 節) は $t \in [1000, 1500]$ で平均していたが、鉛直方向に伸びるのに時間がかかるのでシミュレーション時間を伸ばしている)。100 回シミュレーションを実行して、回転パターンが出現した割合を p_m とする。

図 63 に p_m の ζ 依存性を示す。 $N_u = 2, 3$ の場合は、 $\zeta \sim 0.1$ 程度で p_m が減少し (図 63 インセット)、その後ゼロに収束する。つまり、回転パターンから polarized school に完全に移行したことを意味する。一方で、 $N_u = 1$ の場合は、一度は p_m が減少するもの

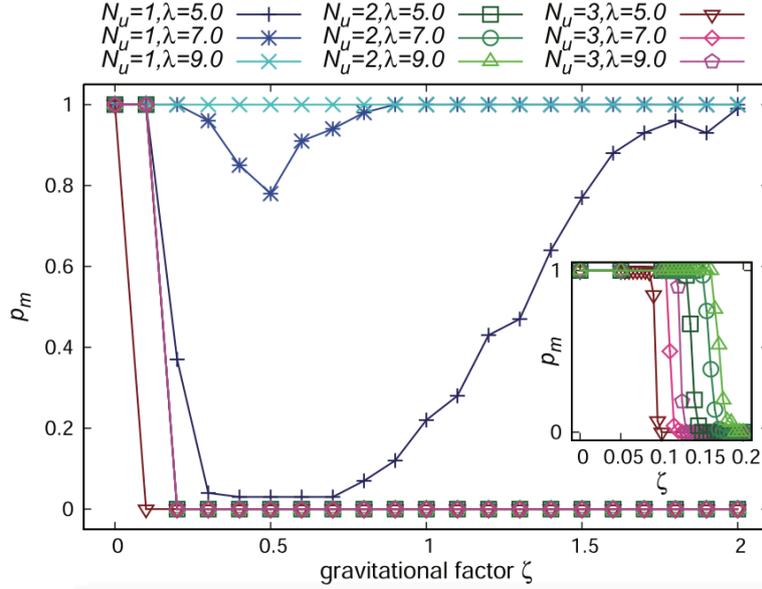


図 63: 回転パターンの出現割合 p_m の ζ 依存性. インセットは $N_u = 2, 3$ における $\zeta \in [0.0, 0.2]$ の狭い範囲での p_m の変化を示す.

の, さらに ζ が上昇するにつれ $p_m = 1$ に回復していく. 特に, $\lambda = 9.0$ のときは $p_m = 1$ を保ち続ける. このように, 重力場を導入したモデルでも, 小さい N_u と大きい λ で回転パターンが出現しやすいという傾向は変わらない.

6.2.2 回転クラスターのサイズ

回転クラスターのサイズを示す. 測定量としては 5.2 節で導入したものを使用する. 図 64(a) は, 図 62(a)-(d) を含む回転パターンにおける, ζ を変化させたときの秩序変数 \bar{P} , \bar{M} と外径 \bar{R}_o , 高さの半分 \bar{S}_3 を示す (\bar{S}_3 は楕円体状のクラスターの場合, 半長軸に対応する). \bar{R}_o は ζ の増加に伴って単調に減少していき, \bar{S}_3 は $\zeta \sim 0.3$ から急速に増大し始める. $\zeta = 2.0$ ではクラスターの高さは 28 程度にも及び, $r_a = 5$ の数倍以上という巨大なクラスターとなる. ちなみに, 外形の減少幅よりも高さの増加幅が大きいため, クラスターの側面積 $A = 2\pi\bar{R}_o \times 2\bar{S}_3$ は, ζ の増加関数となる (図 64(c)). 5.6 節で見たように, 引力相互作用をしている粒子はクラスター表面付近にいるため, 側面積が増加することで正味の引力が強まり 6.2.1 節の $N_u = 1$ における ζ の上昇に伴う $p_m = 1$ への回復が説明できると考えられる.

また, 図 64(a) から秩序変数に関しては低い配向秩序 \bar{P} を保ち, 回転秩序変数 \bar{M} は重力場の効果によって減少しながらも有限の大きさを持つことがわかる. \bar{M} が減少する理由は, 回転秩序変数の定義 (式 (45)) から, 回転クラスターが鉛直方向に伸長するほど小さくなるためと考えられる. つまり, 棒状になるほどクラスターの上下の端にいる粒子の外積 $\hat{c}_i \times \hat{v}_i$ の方向が渦軸方向からずれて, \bar{M} が小さくなるのである. 付録 D に示すように, 円柱状回転クラスターの回転秩序変数を計算することができ,

$$M = w(v_r, v_\phi) \Psi \left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{R}_o} \right) \quad (68)$$

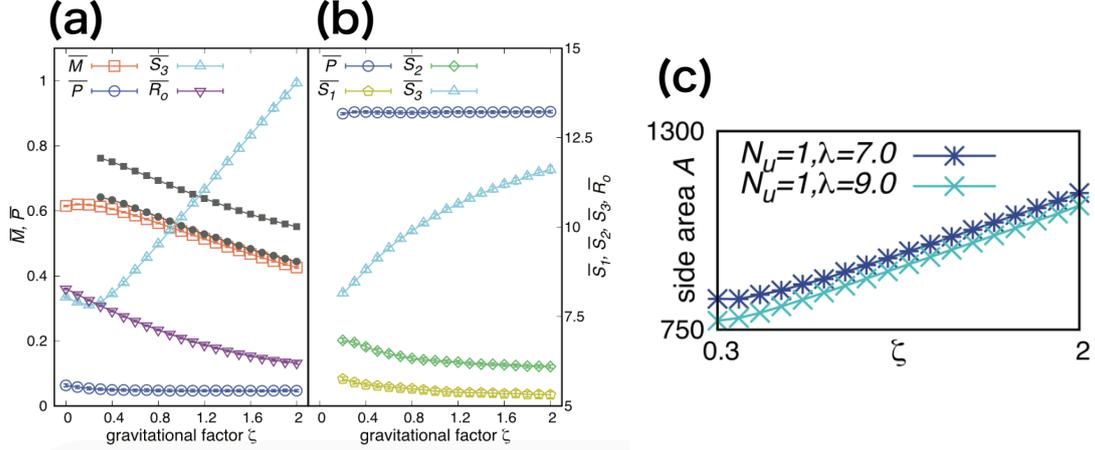


図 64: 秩序変数とクラスターサイズの ζ 依存性. (a), (b) \bar{P} , \bar{M} 及び \bar{R}_o , \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 の ζ 依存性. (a) $N_u = 1$, $\lambda = 9.0$ の場合. (b) $N_u = 3$, $\lambda = 9.0$ の場合 ($p_m = 0$ の polarized school のみが出現する ζ の範囲でプロット). (a) において, 灰色の四角点は円柱状回転パターンから計算された回転秩序変数 $M = \Psi(\bar{S}_3/\bar{R}_o)$, 灰色の丸点は $M = w(v_r, v_\phi)\Psi(\bar{S}_3/\bar{R}_o)$ に対応する. (c) $N_u = 1$, $\lambda = 9.0$ の回転クラスターの側面積の ζ 依存性.

の形となる. ここで, v_r , v_ϕ はそれぞれ粒子の平均動径方向速度, 方位角方向速度であり, $\Psi(q)$ は式 (D.23) において $q = (\text{高さ}/2 \times \text{外径})$ であることを用いた. 実際, 図 64(a) に示すとおり, \bar{M} は式 (68) と同じように減少している (図 64(a) には動径方向速度がゼロで $w(v_r = 0, v_\phi) = 1$ の場合もプロットしている). このように, 定量的にも円柱状の回転パターンを得ることができた.

6.2.3 polarized school のサイズと数密度分布

続いて, polarized school に関する結果に移る. 図 64(b) は polarized school における, ζ を変化させたときの配向秩序変数 \bar{P} と慣性モーメントの固有ベクトル方向のサイズ \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 である. polarized school なので \bar{P} は 1 に近い値を取っている. また, ζ の増加とともに鉛直方向に伸長するを反映して \bar{S}_3 が増大し, \bar{S}_1 , \bar{S}_2 は減少する. ただし, $\bar{S}_1 \approx \bar{S}_2$ とはなっていないため, 円柱状ではなく 2 軸異方性を持った形をしていることがわかる.

この形状を詳しく調べるために鉛直断面での数密度分布を測定する. まず, クラスターと一緒に運動する直交座標系 (x_P, y_P, z) をとる. この座標系では配向秩序変数ベクトル $\mathbf{P}(t)$ が x_P - z 平面に含まれる. x_P 軸の単位ベクトルは, 平面内でクラスターが進む向きとして

$$\mathbf{e}_x^{(P)}(t) = \frac{(I - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)\mathbf{P}(t)}{|(I - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)\mathbf{P}(t)|} \quad (69)$$

となり (I は恒等行列), y_P 軸方向の単位ベクトルは $\mathbf{e}_y^{(P)}(t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x^{(P)}(t)$ で定義される.

このとき、 x_P - z 平面でクラスターを切った断面上での数密度分布を

$$f(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{i=1}^N H\left(\frac{r_e}{2} - \left| \mathbf{e}_y^{(P)}(t) \cdot \mathbf{c}_i(t) \right|\right) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_i(t)) \quad (70)$$

と定義する．ここで、 $H(o)$ はヘヴィサイド階段関数であり、 $\boldsymbol{\rho} = (x_P, z)$ 、 $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ は $\mathbf{c}_i(t)$ を x_P - z 平面に射影したベクトルである． $f(\boldsymbol{\rho}, t)$ を $t \in [1500, 21500]$ において平均し、規格化したものを $\hat{f}(\boldsymbol{\rho})$ とする．

図 65(a), (b) は $N_u = 3$ 、 $\lambda = 9.0$ における $\hat{f}(\boldsymbol{\rho})$ を示す． ζ が上昇するとクラスターが鉛直方向に伸びていき、 $\zeta = 2.0$ では翼型になっていることがわかる．さらに、クラスター前方の数密度が上昇していることがわかる．一方で、引力が小さい場合 ($\lambda = 0.5$) はクラスターの形状は水平方向に伸びた楕円体状で、数密度はほとんど一様分布になっている (図 65(c))．引力が大きいために前方の密度が上昇する理由は、定性的には前方の粒子が引力相互作用によって引き止められるためと考えることができる．後方の粒子たちはそのまま前進し続けるため、前方で“渋滞”が生じ密度が高くなる．実験的には、ローチ (コイの仲間) の群れなどの観測から、実際の魚群でも前方密度が上昇していることが観測されている [148]．このようなクラスター前方での密度上昇はゾーン型モデル (4.1.2 節) [146]

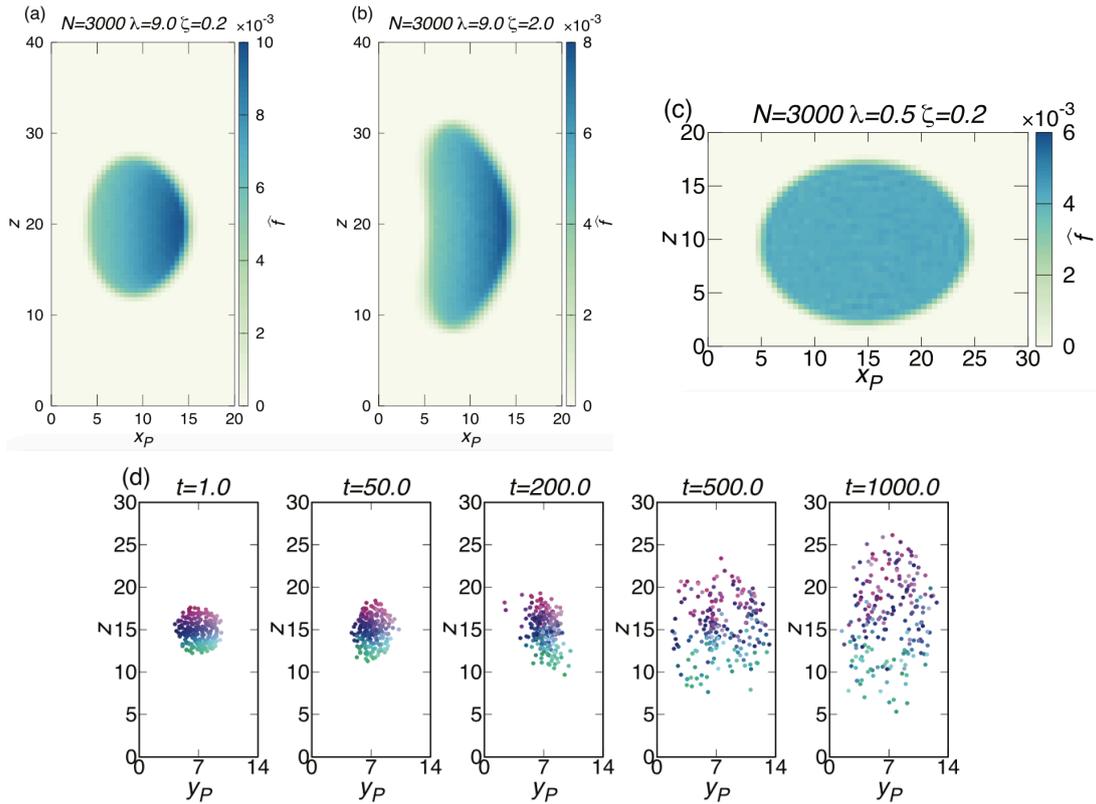


図 65: (a), (b), (c) $N_u = 3$ でのクラスターの鉛直断面での規格化された数密度分布関数 $\hat{f}(\boldsymbol{\rho}) = \hat{f}(x_P, z)$ ．座標原点は見やすくするために移動させている．(a) $\lambda = 9.0$ 、 $\zeta = 0.2$ の場合 (図 62(f) に対応)．(b) $\lambda = 9.0$ 、 $\zeta = 2.0$ の場合 (図 62(g) に対応)．(c) $\lambda = 0.5$ 、 $\zeta = 0.2$ の場合．(d) $\lambda = 9.0$ 、 $\zeta = 2.0$ における、クラスター重心に近い 200 粒子の位置の y_P - z 平面への射影の時間発展．各粒子の色付けは $t = 1$ でなされている．

でも見られるが、そのモデルでは魚体の側方のみ配向相互作用ゾーンが設けられているためと説明されている。

図 65(d) は鉛直方向に伸びる様子をプロットしたものであり、初期時刻にクラスターの重心近くにいた 200 粒子の位置を yP - z 平面に射影して見ている。水平方向に並んだ個体 (暗い色から明るい色) はよく混ざり合うのに対し、鉛直方向の並び (紫色から緑色) は乱れがほとんどないまま広がっていくことがわかる。実際の魚群で鉛直方向に伸びた配向した群れは、数千匹のカタクチイワシの群れで観測されている [149]。一方で、水平方向に伸びた配向した群れは、数十～数百匹の少数の魚の群れや浅い水槽での実験で観測されている [70,150]。(しかし、本モデルで粒子数 300 の少数系では群れは球形に近くなる。)

6.3 鉛直方向への粒子の運動

この節と次の節では補足的な結果を示す。回転クラスターにおける、鉛直方向の運動のタイムスケールを平均二乗変位 (MSD) により調べる。鉛直方向の MSD を

$$\Delta_z(\delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_{z,i}(t_0 + \delta t) - c_{z,i}(t_0))^2 \quad (71)$$

と定義する ($\delta t > 0$)。

図 66(a) より、MSD は $\delta t \sim \tau_0 = 1$ 程度までは δt^2 に比例して増加し、その後、 $\delta t \sim 10^3$ - 10^4 まで δt に比例し、最後には一定値になる。言い換えれば、 $\delta t \sim \tau_0 = 1$ の短いタイムスケールまでは等加速度運動によるバリスティックな運動をしており、中間のタイムスケール $\delta t \lesssim 10^3$ - 10^4 ではブラウン運動に移行し、最終的にクラスターの端に到達して一定値になる。

さらに、

$$\Delta_z(\delta t) = 2D_z \delta t^\gamma \quad (72)$$

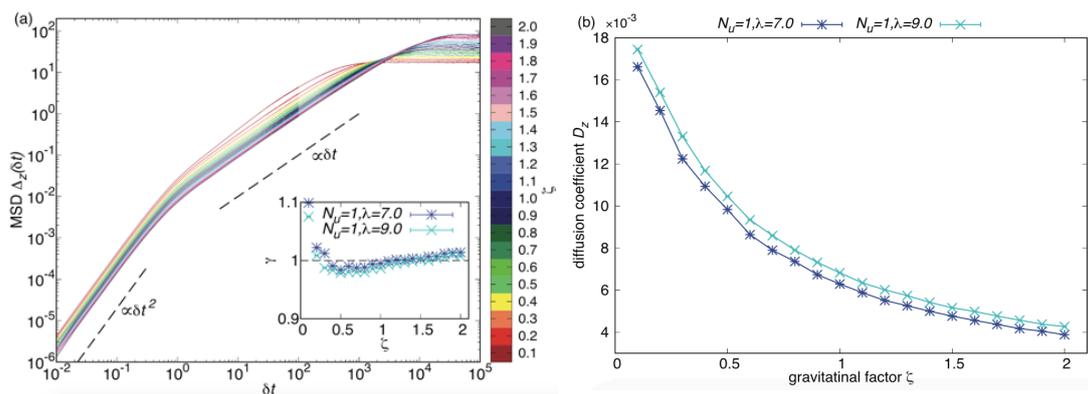


図 66: $N_u = 1$, $\lambda = 7.0, 9.0$ での z 方向の MSD. (a) $\lambda = 9.0$ において $\Delta_z(\delta t)$ を 500 回測定したときの平均 (式 (71) において $t_0 = 2500 + 10n$, $n = 0, 1, \dots, 499$ とした). 挿入図はべき指数 γ の ζ 依存性. 破線は $\gamma = 1.0$ で通常拡散に対応する. (b) 拡散係数 D_z の ζ 依存性. γ と D_z は、MSD を $\delta t \in [5, 50]$ において $\Delta_z(\delta t) = 2D_z \delta t^\gamma$ としてフィッティングすることで得られ、エラーバーはフィッティングでの誤差を示す。

として、中間のタイムスケールでの拡散係数 D_z とべき指数 γ を調べる。もし、ブラウン運動である場合は $\gamma = 1$ になる [10]。また、 ζ が大きいほど鉛直方向へは遅い運動になるため、拡散係数は小さくなるはずである。シミュレーション結果を図 66(a) インセットと図 66(b) に示す。べき指数は、ほとんどの ζ において 1 に近いが、 $\zeta = 0.1$ においては $\gamma \approx 1.1$ で (若干ではあるが)super-diffusion になっている。これは、 $\zeta = 0.1$ では重力の効果が弱いため、クラスターの渦軸が完全に z 軸と一致せず、その揺らぎが MSD に影響を及ぼしたと考えている。また、拡散係数は ζ の上昇に伴って減少する。一方で、引力が強くなるとクラスターの水平方向の端に到達したときに引き戻されて速度が上昇するので、拡散係数は増加すると説明できる。

6.4 渦軸の運動の抑制

最後に、重力場の効果が渦軸の運動に与える影響について述べる。 $\theta_z(t) = \arccos(\mathbf{e}_M(t) \cdot \mathbf{e}_z) \in [0, \pi]$ を渦軸と \mathbf{e}_z のなす角度とする ($\mathbf{e}_M(t) = \mathbf{M}(t)/|\mathbf{M}(t)|$ である)。ここで、後のために

$$\Theta_z(t) = \frac{\theta_z(t)}{\pi} - \frac{1}{2} \in [-0.5, 0.5] \quad (73)$$

という規格化した角度を用いる。図 67(a) に $\Theta_z(t)$ の長時間の時間発展を示す。 $\zeta = 0.0001$ では、非常にゆっくりと渦軸がほとんどランダムな方向に運動していることがわかるが、 $\zeta \geq 0.001$ では $\Theta_z(t) \approx \pm 0.5$ に収束し始め、渦軸が z 軸と平行になることがわかる。遷移領域 ($\zeta = 0.0007$) では、 $\Theta_z(t) \approx +0.5$ と $\Theta_z(t) \approx -0.5$ の間を行き来するフリップ・フロップ現象が見られた。このようにして、重力感知のタイムスケール τ_0/ζ が基本タイムスケール τ_0 の 1000 倍程度であったとしても、配向相互作用による協力現象によって渦軸が z 軸と平行になる。

$\Theta_z(t)$ の変化は非常に遅いため、統計的情報を得るには長時間の時間平均が必要である。 $\langle \circ \rangle$ を $t \in [1500, 201500]$ における時間平均とする。 $\langle \Theta_z \rangle$ は、ランダム運動でもフリップ・フロップ運動でも 0 となって両者の区別が付きにくいので、絶対値の平均 $\langle |\Theta_z| \rangle$ を測定す

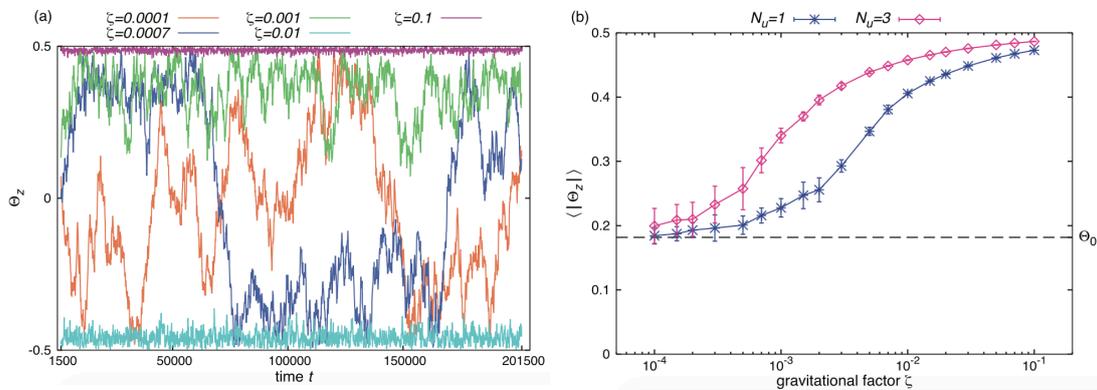


図 67: 渦軸の向き ζ 依存性. (a) $N_u = 3$, $\lambda = 7.0$ における典型的な $\Theta_z(t)$ の時間発展. (b) $N_u = 1, 3$, $\lambda = 7.0$ における $\langle |\Theta_z| \rangle$ の ζ 依存性. エラーバーは 10 回のシミュレーションにおける標準偏差を示し、破線は Θ_0 を表す。

る。もし渦軸が完全にランダムな方向を向く場合は、

$$\Theta_0 = \int_{-1}^1 d(\cos \theta_z) P(\cos \theta_z) |\Theta_z| = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_z \sin \theta_z \left| \frac{\theta_z}{\pi} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \simeq 0.182 \quad (74)$$

という値をとる。図 67(b) に $\langle |\Theta_z| \rangle$ の ζ 依存性を示す。 ζ の上昇に伴って $\langle |\Theta_z| \rangle$ は Θ_0 から 0.5 に増加する。また、 N_u が小さい方が粒子の運動の柔軟性が高いため、 $\langle |\Theta_z| \rangle = 0.5$ への収束が遅い。

7 遊泳と流体相互作用の先行モデル

前章までは、数千から数万個体規模の魚群の集団運動を扱ったが、本章と次章では、単体およびペア (2 個体) の遊泳と流体相互作用に着目したモデル化について論じる。本章では、その基礎となる先行モデルを概観する。

7.1 単独遊泳のモデル化

本節では、単体の遊泳のモデルについて述べる。

7.1.1 古典モデル

初期の古典的モデルでは、数値計算は用いず簡単な近似モデルを立て、遊泳パターンそのものではなく抗力や推力を解析的に求めることが目標であった。特にウナギ型泳法 (2.1 節) に注目してモデル化がされていた [151, 152]。というのも、ウナギ型泳法の動きは、魚のみならず、ヘビといった爬虫類やボウフラ、ヒルやゴカイなどのいわゆる蠕虫に共通する運動様式であり、一般性があるためである。

まず、Taylor(1952) [151] では、円柱状のセグメントから構成される個体が正弦波状に屈曲して泳いでいるとしている。このモデルでは定常一様流を仮定し、体の動きによる流れの乱れは考慮しない。また、遊泳による後流も考慮されていない。体の横方向の変位は

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - (U - V)t)\right) \quad (75)$$

で与えられる (図 68)。ここで、 A は振幅、 λ は体うねりの波長、 U は推進速度、 V は体うねりの速度である。各セグメントにかかる抵抗力を図 68 のように接線方向の抵抗力 L と法線方向の抵抗力 N に分けて計算し、全セグメントにかかる合力が釣り合う (すなわち定常遊泳する) 条件を求めている。ただし抵抗力は、高レイノルズ数領域で適用される、速度の 2 乗に比例するニュートン抵抗が採用されている (2.2.1 節) [39]。

このように、Taylor(1952) では粘性摩擦力によって推力を得るとしているが、推力を得る要因としては付加質量による効果もあり、その寄与は Lighthill(1960) [152] により考察された。Lighthill(1960) では非粘性の理想流体を仮定しているため、ダランベールのパラドクス [39] より加速度運動をしない限り魚体に力は作用しない。加速度運動をする場合

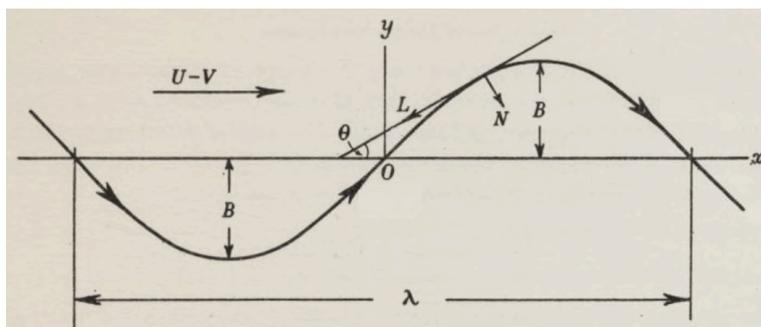


図 68: Taylor(1952) [151] のモデルの模式図。図は [151] より許可を得て転載。

は、定性的には流体を押しのけるための慣性力が必要になり、自身の質量が増加したのと等価になる。この質量の増分が付加質量 (あるいは仮想質量) と呼ばれる。従って、理想流体中では、この慣性力の反作用のみが魚体にかかる力であり、これによって推進力を得ると考える。

Lighthill(1960) では、尾の先端付近がもたらす推力による仕事率を幾何学的な手法で算出している。推力のなす仕事率が、尾ヒレの運動の仕事率から流体にもたらされる仕事率を引いたものとして求められている。尾ヒレは高さ d の平板とみなされ、無限に長い平板にかかる単位長さあたりの付加質量

$$m_e = \frac{\pi}{4} \rho_w d^2 \quad (76)$$

を用いて計算している (ρ_w は水の質量密度)。これは、2次元楕円柱において半長軸 a をゼロにした極限として導出される [153](付録 E を参照)。

7.1.2 板や翼による近似モデル

近年のモデルでは、粘性抵抗と付加質量の効果を同時に扱っている [154–157]。まずは、アジ型泳法 (2.1 節) を 2 点ヒンジの振動翼とみなす近似モデルについて概観する [155, 156]。図 69(a) に示すように、空間の原点に固定されたヒンジに、質量、太さの無視できる棒が取り付けられており、他端にはもう 1 つのヒンジを介して流線型物体 (翼) が取り付けられている。イメージとしては、棒が尾柄 (尾の付け根部分)、翼が尾ヒレに対応し、 x 軸の負の方向に推進していると考えている。図中の棒の角度 θ は、CPG の神経回路 (2.5.1 節) による定常的な尾運動を模して

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t \quad (77)$$

という予め与えられた時間発展をする。翼の角度 β は振動の位相遅れ ε を伴って

$$\beta(t) = \beta_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (78)$$

と振動すると仮定する。

この翼に作用する粘性摩擦力を計算するために、流れ場の非定常部分は無視して、Taylor(1952) と同じく定常流を仮定している。摩擦力としてはニュートン抵抗を考えてい

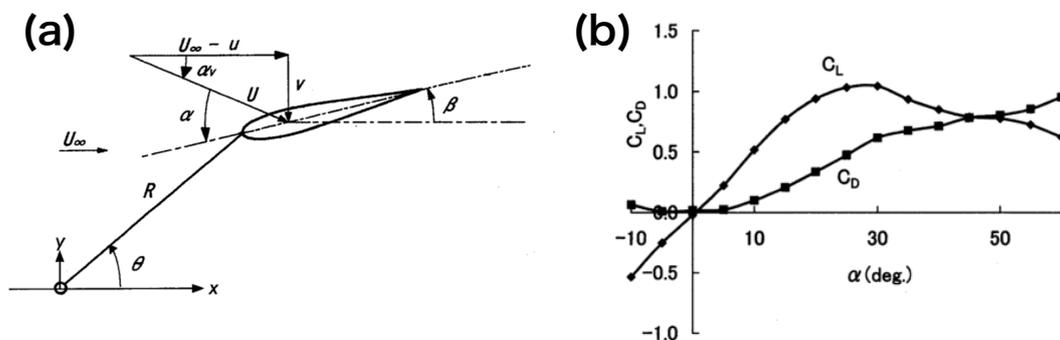


図 69: 2 点ヒンジ型モデルの概要 [156]。 (a) モデルの模式図。 (b) 尾ヒレのモデルによる抵抗係数 C_D と揚力係数 C_L 。 図は [156] より許可を得て転載。

て、背景定常流に平行成分 (抗力) F_D と垂直成分 (揚力) F_L がそれぞれ

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_w S C_D(\alpha)U^2, \quad F_L = \frac{1}{2}\rho_w S C_L(\alpha)U^2 \quad (79)$$

で与えられる。ここで、 $S = bc$ は翼の幅 b と長さ c の積として側面積を表現し、 $\alpha = \theta + \beta$ は迎え角である (図 69(a))。また、 U^2 は翼の受ける速度の 2 乗、つまり

$$U^2 = (U_\infty - u)^2 + v^2 \quad (80)$$

である (U_∞ は背景一様流れ、 u, v は翼の運動速度の x, y 成分)。抗力係数 $C_D(\alpha)$ と揚力係数 $C_L(\alpha)$ は迎え角 α の関数で、有限アスペクト比の平板翼や魚の尾ヒレの模型を用いた実験から求めている (図 69(b))。

付加質量による効果については、Lighthill(1960) のように無限平板の単位長さあたりの付加質量 $\pi\rho_w c^2/4$ を用いる。力は翼に垂直な方向にかかり、翼の加速度の垂直成分に比例するので

$$F_M = \frac{\pi}{4}\rho_w b c^2 \frac{d(U \sin \alpha)}{dt} \quad (81)$$

という表式になる。3つの力 F_D, F_L, F_M の x 方向の成分を合わせて、推力としている。これらの論文 [155, 156] では、 F_D, F_L, F_M のなす全仕事率と推力のなす仕事率の比をとってエネルギー効率を定義し、エネルギー効率を最大にする β_0 や ε を最適化することを目標としている。それゆえ、このモデルによる遊泳速度などは計算されていない。

他の近年のモデルとしては魚体を弾性板で近似するものが存在する [157]。弾性板を各セグメントに分けて計算するため (図 70(a)) 数値計算コストは高くなりやすいが、CPG に

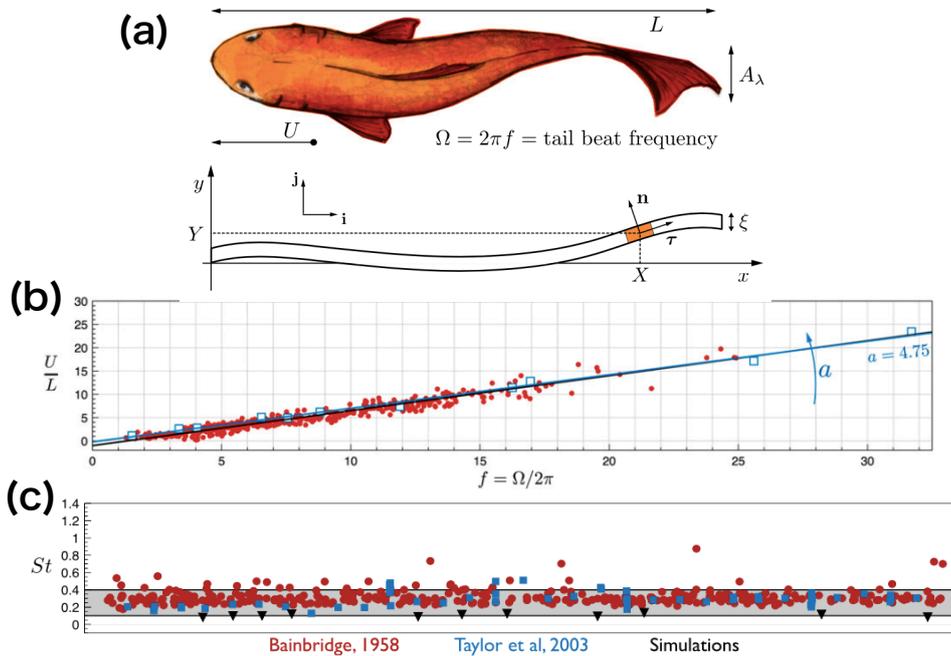


図 70: 弾性板型モデルの概要 [157]。 (a) モデルの模式図。 (b) CPG の振動数 f [Hz] と遊泳速度 U/L [BL] の実験値との比較。赤の点が実験値、青の四角点がシミュレーションによる値である。 (c) ストローハル数 St の実験値との比較。図は [157] より許可を得て転載。

よる板のうねりパターンを様々に変えることで全ての BCF 型泳法 (2.1 節) と定性的に対応させられる利点がある。このモデルでは流体による摩擦力, 付加質量に加え, 内部応力による力が発生する。

摩擦力としては, 中程度のレイノルズ数で有効な層流境界層による, 速度の $3/2$ 乗に比例する摩擦力 (2.2.1 節) を仮定している。また, 弾性板周りの理想流体によるポテンシャル流れを, 板の変形が微小として計算し, 付加質量による弾性板の加速度に依存する力などを求めている。このようなセグメントに分割されたモデルを扱う場合は, 加速度に依存する力以外に, (ダランベールのパラドクスにより系全体では消失する) 速度に依存する力も計算しておく必要がある。

内部応力については, 板に垂直な断面にかかる合応力 (応力を面積分したもの) を計算する。重要なのは合応力の板に垂直な成分である。この成分はトルクの空間微分から求められ [158], トルクは受動的な弾性力による部分と, CPG による能動的な部分に分けられる。受動的な弾性によるトルクは, 板の曲率に依存し

$$M_e(x) = B(x) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (82)$$

で与えられる [158]。ここで $B(x) = EI(x)$ は曲げ剛性を表し, E はヤング率, $I(x)$ は断面二次モーメント (二次モーメント y^2 を板の断面で積分したもの), $Y(x)$ は板の横変位である (図 70(a))。

一方で, CPG によるアクティブなトルクは

$$M_a(x) = A \sin(\Omega t - Qx) F(x) \quad (83)$$

と与えられ (Ω は CPG の振動数, Q はうねりの波数), $F(x)$ によって振幅が体の位置により異なることを表現している。また, $B(x)$ はパンブキンシード (淡水魚) の実験測定値を使用し, $F(x)$ は $B(x)$ に比例すると仮定している (これは, $B(x)$ が体の厚みすなわち筋量に依存するため, CPG によるトルクも単純に筋量に比例すると仮定するためである)。

このようなモデルでシミュレーションを実行すると, 適当な振幅 A では図 70(b) のように遊泳速度と振動数の比例関係 (2.3 節) を再現できることがわかる。ただし, 図 70(c) に示すように, ストローハル数については $St \approx 0.1$ 程度であり, 実測値 $St \approx 0.3$ からは離れている (2.2.1 節)。遊泳速度と振動数の比例関係は実験と一致しているので, ストローハル数の定義を考えると, 実際の魚よりもこのモデルの“尾”の振幅が小さいと言える。すなわち, このモデルでは実際の魚よりも小さい振幅で高い遊泳効率を示すことを意味する。(おそらく, 摩擦抵抗にニュートン抵抗よりも小さい, 層流境界層による抵抗を用いているためと考えられる。)

また, ここで述べた遊泳モデルでは, いずれも後流の逆カルマン渦 (2.6 節) は考慮されていないが, これは自己逆カルマン渦場が自身の遊泳にもたらす効果は小さく, 定性的な挙動は変化しないと考えられているからである [157]。逆カルマン渦場が重要となってくるのは 2 体以上からである。

7.2 流体相互作用のモデル化

魚の作る流体場には大きく分けて、魚体が遠方に作る双極子場と尾ヒレの運動が作る逆カルマン渦が存在し、どちらも流体相互作用として遊泳に利用されていると考えられている。双極子場に関しては、双極子場に対して 3.1 節で述べたような感丘がどのように生理学的に反応するかについてはモデル化されていないが、流れ場の自体は自己駆動粒子モデルで導入されている [121, 132, 133, 159, 160]。しかし、これらの自己駆動粒子モデルでは、低レイノルズ数領域から中程度のレイノルズ数領域 (ストークス流れから層流領域) までを扱っており、高レイノルズ数領域の逆カルマン渦については無視されている。つまり、数百、数千の自己駆動粒子の系で逆カルマン渦の効果 (3.3.2 節) を取り扱ったモデルは現在のところ存在しない。

従って、ここでは自己駆動粒子モデル以外で逆カルマン渦の効果について考察したモデルについて述べる。重要なことは、これらのモデルでは個体間の距離や尾の運動の位相差が固定されるなどの一定の制約条件が存在し、現実の魚のように自発的に運動した場合に 3.3.2 節で扱ったような現象が観測されるか明らかではない。言い換えれば、ある特定の距離や位相差における流体力学的な安定性は調べられるが、どのようにすればそのような距離や位相差を自発的に取りうるのか、自発的にうねり運動するモデルを用いた検証はされていない。

7.2.1 数値流体力学計算によるモデル

まず代表的なものとして、高計算コストだが数値流体力学計算 (CFD) を用いて、流体の運動を直接計算するモデルがある [161–164]。CFD の手法そのものに触れることは、本研

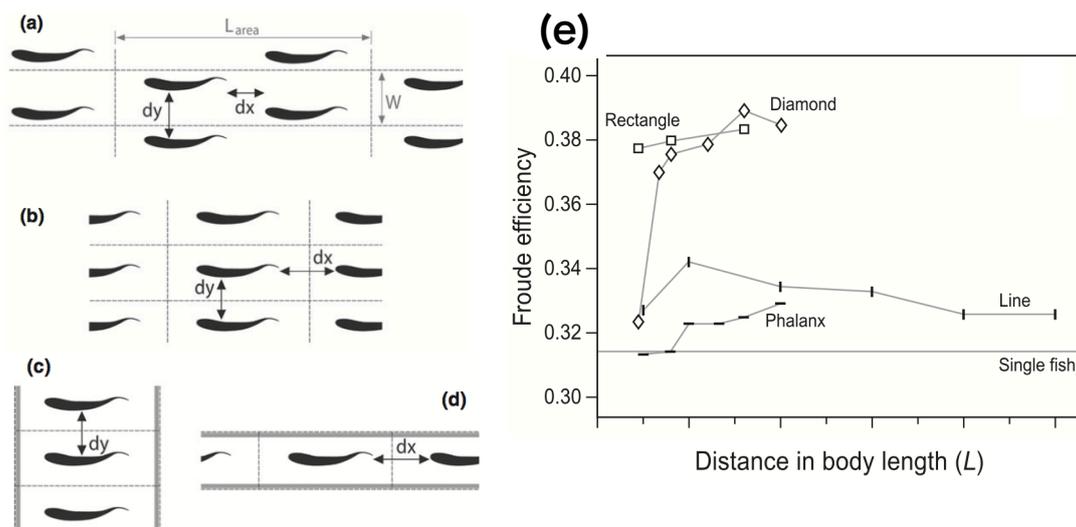


図 71: 格子型完全同期の CFD モデル [161]。 (a)-(d) 格子と境界条件の設定。点線が周期境界, 実線が速度減衰境界。 (a) ひし形 (diamond)。 (b) 長方形 (rectangular)。 (c) 隊列形 (phalanx)。 (d) 線状形 (line)。 (e) フルード効率の魚間距離依存性。魚間距離は (a)-(c) では dy に対応し, (d) では dx に対応する。図は [161] より許可を得て転載。

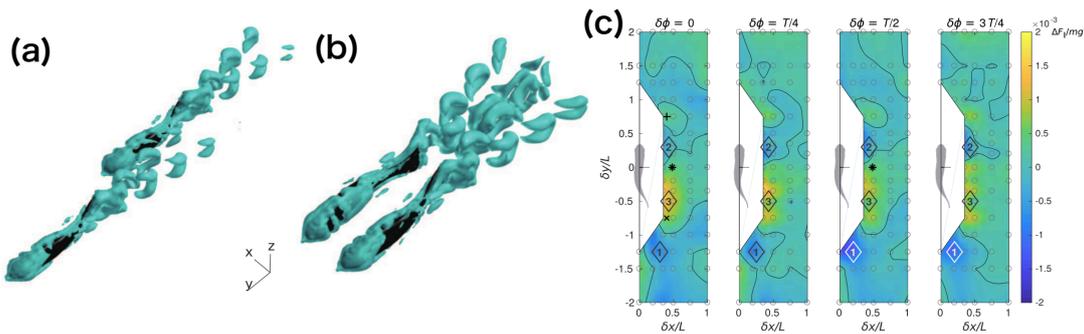


図 72: 2 匹の場合の CFD モデルによる計算結果 [164]. (a) 魚間距離 $\delta x = 0.2$ BL, $\delta y = 1.25$ BL, 尾の運動の位相差 $\delta\phi = 0$ の場合. (b) 魚間距離 $\delta x = 0.5$ BL, $\delta y = 0.0$ BL, 尾の運動の位相差 $\delta\phi = T/2$ の場合 (T は尾の運動の周期). また, 水色の曲面は Q 値の与えられたしきい値を表現している. Q 値は速度勾配テンソル $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{x}$ の対称成分と非対称成分の大きさのどちらが優勢かを表すものであり, 曲面の内側では渦度が大きい. (c) 魚体にかかる y 軸方向の力の成分が単独で遊泳しているときに比べ, どれだけずれるかを表現したカラーマップ. 灰色の魚に対する, もう一匹の魚の位置と位相差の関数として, 力のずれがプロットされている. 図は [164] より許可を得て転載.

究の趣旨から外れるため割愛する. CFD によって得られた結果のみ簡単に述べることにする.

アジ型泳法のボラ [161] やサバ [162] を模した, うねり運動をする物体を 2 次元平面に格子状に並べる CFD モデルがある (図 71(a)-(d)). この場合, 1 匹か 2 匹が入る程度のシミュレーションボックスを周期境界条件で連結することで, 無限匹の群れでの流体力学相互作用を考察している. ただし, Taylor(1952) [151] の研究と同様に, うねり運動は人為的に与えられており, 全ての物体が同じうねり運動を行うように設定されている. すなわち, 尾の運動が完全に同期している状況を調べている. これは, 3.3 節で述べた Weihs(1973) [89] になっている. 実際, このモデルでは, 遊泳のエネルギー効率を表すフルード効率 (推力 \times 遊泳速度/遊泳仕事率) を指標とすれば, ひし形格子の場合に最も効率がよくなることを示しており, Weihs(1973) の予想が検証されている.

また, 2 匹の場合の距離を固定した CFD による研究もある (図 72(a), (b)) [163, 164]. ここでもうねり運動は人為的に予め決定され, 特定の位相差が仮定されている. 図 72(c) に示すように, 流体力学的には横方向に並んだ場合, 単独で遊泳する場合と同じ力を受ける. 一方, 仕事率の測定では, 斜め後ろ (図 72(c) では 3 番の位置) において最も遊泳の効率がよくなる.

7.2.2 振動翼による近似モデル (実験)

上述の CFD によるモデルが流体の詳細なモデル化であるのに対して, 近似的な魚体のモデルを作り逆カルマン渦の効果を検証するという試みもなされている. 魚体全体を翼とみなし, 軸周りに回転振動 (flapping) させたり, 横方向に振動 (heaving) させたりすることで逆カルマン渦を発生させるものがある. 振動翼による実験について述べる [165–168].

flapping する振動翼の実験 [165, 166] では, 例えば, 図 73(a) のように, 振動翼を 2 つ

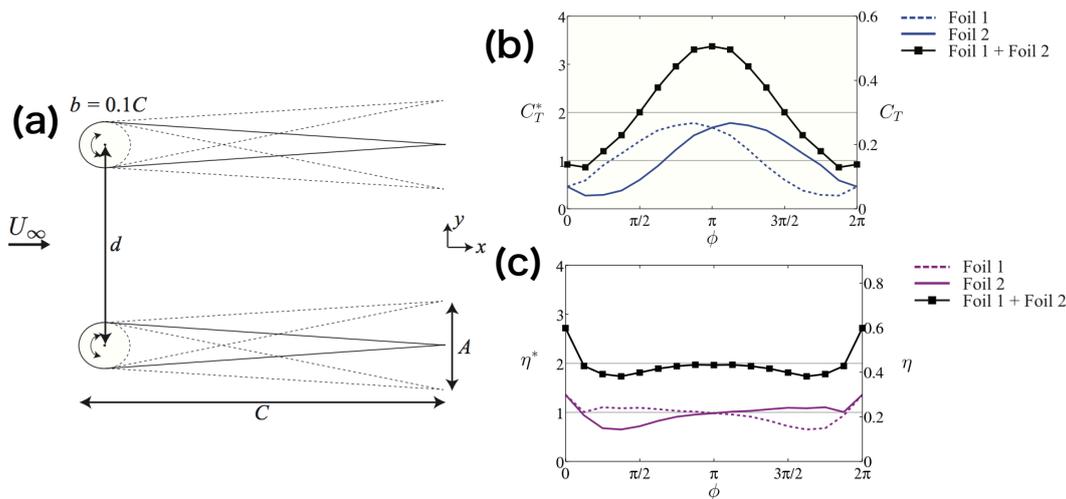


図 73: flapping する振動翼の実験 [165]. (a) 実験の模式図. (b) 無次元化された推力 C_T (右) と規格化された推力 C_T^* (左) の位相差 ϕ 依存性. $C_T^* = 1$ が 1 個の振動翼の推力に対応する. (c) 無次元化されたフルード効率 η (右縦軸) と規格化されたフルード効率 η^* (左縦軸). 図は [165] より許可を得て転載.

並べることで推進力と遊泳エネルギー効率 (フルード効率) の位相差依存性などを調べている. この実験でも距離や位相差は固定されている. 結果としては, 同位相状態では推力が下がる代わりにエネルギー効率は上昇し, 逆位相状態ではエネルギー効率は単独遊泳のときと同じであるが推力が上昇するという結果を得ている (図 73(b), (c)). これらの結果は, 2 振動翼の生成する逆カルマン渦を介した複雑な流体相互作用の結果として考えられており, 定性的に説明することは難しい.

また heaving する振動翼の実験 [167,168] では, 図 74(a) のように流体相互作用によって距離 g が自発的に変化する装置が用いられた. ただし, 位相差 ϕ は自発的に変化せず, 予め与えられた時間依存性を持つ. この実験では, 位相差ごとに流体力学的に安定な距離を観測し, 図 74(b) のようにまとめており, 3.3.2 節の図 28 で見たような距離と位相差の線形関係が存在することがわかる. ここで, 図 74(b) の破線は前方の振動翼の作る流れ場に完全同期している場合を示している. また, 実験により求められた流体力学的に安定な点に沿う茶色実線は, 以下のような理論モデルにより求められる: 前方の振動翼の heaving の速度が流体を媒介して時間とともに指数関数的に減衰しながら後方の振動翼に伝わる. このとき, 流体の速度と後方の振動翼の heaving の相対速度に依存するニュートン抵抗が生じる. つまり, 互いの振動翼の heaving 速度のみを用いたシンプルなモデルである. 図 74(b) の安定点は, 距離が小さいときは前方の振動翼による流れ場に対し完全同期するものと一致し, 距離が大きくなるにつれて, 前方の振動翼による流れ場の情報が減衰することを考慮したモデルに一致するようになる.

7.2.3 弾性棒や振動翼による近似モデル (理論・数値計算)

実験のみならず, 理論的数値的研究も存在する [169–172]. 魚体を 2 次元平面での弾性棒とみなし, ナビエ・ストークス方程式を数値的に解く一連のモデルがある [169–171]. こ

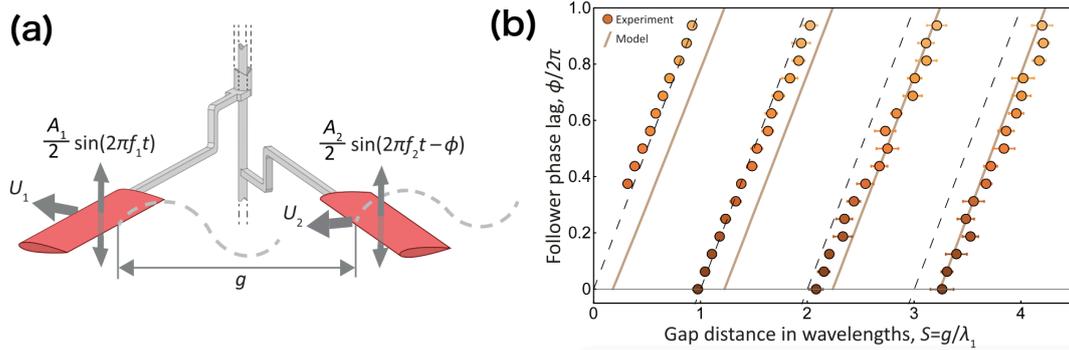


図 74: heaving する振動翼の実験 [168]. (a) 実験の模式図. (b) 流体力学的な安定点における位相差 ϕ の g 依存性. 図は [168] より許可を得て転載.

のモデルでは、棒の一端が heaving 運動をしており、棒に平行な方向には自由に運動できるようになっている。ただし、heaving 運動は事前に与えられているのもであり、各弾性棒の運動の位相差は固定されている。従って、heaving する振動翼の実験 [168] と調べていることは本質的には同じで、2-4 個の弾性棒が同位相 (あるいは逆位相) の運動を行うとき、流体力学的に安定な距離を数値的に求めている。

他にも、2次元翼理論による解析計算を用いた、格子状に配置された heaving する無限個の振動翼の系に対する研究も存在する (図 75) [172]。ここでも運動の位相は予め与えられている。ただし、特徴として、heaving の周期の半分の時間ごとに運動方程式を積分するモデルを採用しており、計算コストが CFD などに比べ大幅に抑えられていることが挙げられる。このモデルでは、周期の半分の時間ごとに渦度 $\pm\gamma$ の渦が交互に放出され、時間経過と共に指数関数的に減衰していく (図 75(a))。このような渦場が存在する状況での (理想流体での) 複素速度ポテンシャルを求め、翼にかかる力を解析的に求めている (渦は 2.6.1 節で見た粘性流体中のランキン渦ではなく、コア半径がゼロの理想流体中の渦である)。シミュレーション結果としては、2次元格子型 CFD モデル [161] と同様、ひし形 (図 75(b)) の遊泳効率が最もよく、ついで長方形 (図 75(c)) の効率がよいという結果が得られている。

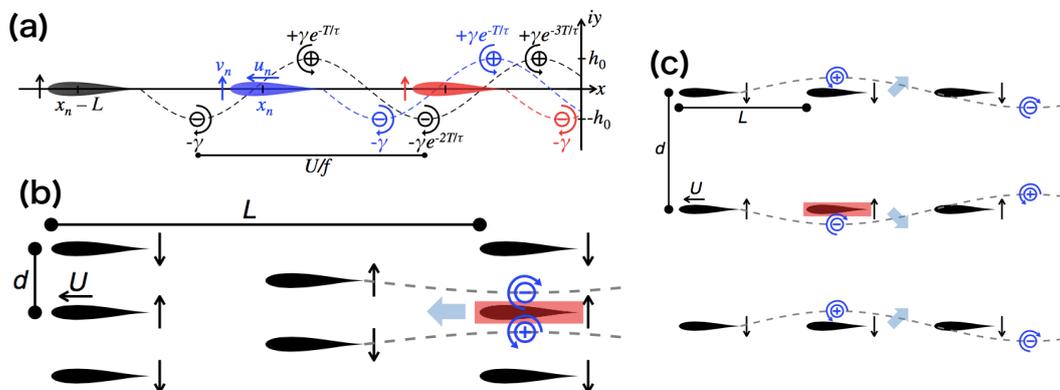


図 75: 格子状に heaving する振動翼の並んだモデル [172]. (a) シミュレーションの模式図. (b) ひし形編隊. (c) 長方形編隊. 図は [172] より許可を得て転載.

8 逆カルマン渦を介した相互作用のモデル化

8.1 モデルの定式化

この章の結果は本研究に関する著者らの論文 [173] に基づく. (S. Ito and N. Uchida, Vortex phase matching of a self-propelled model of fish with autonomous fin motion, *Phys. Fluids* **35**, 111902 (2023). doi:10.1063/5.0173672 より許可を得て図表を転載.)

第 7 章で挙げた先行モデルを逆カルマン渦の有無や自己駆動の有無, 計算コストの観点からまとめると以下のようなになる.

- 逆カルマン渦なし・自己駆動・中計算コスト: 弾性板の単独遊泳モデル [157].
- 逆カルマン渦なし・自己駆動・低計算コスト: 自己駆動粒子モデル [121, 132, 133, 159, 160].
- 逆カルマン渦あり・位置固定・高計算コスト: CFD モデル [161–164].
- 逆カルマン渦あり・位置固定・低計算コスト: 格子型編隊の 2 次元翼のモデル [172].

このように, 逆カルマン渦あり・自己駆動の先行モデルは存在しないことがわかる. 従って, 本研究では逆カルマン渦を考慮した自己駆動モデルを構築することを目標とする. 特に, 翼をヒンジで結合したモデル [155, 156] を参考にして, 弾性板の単独遊泳モデル [157] より低計算コストのモデルを構築する. 加えて, 3.3.2 節での実験結果 [75] 等と比較することで, 本研究の近似モデルの有用性を確かめる.

8.1.1 モデルの概略

本モデルの導出の詳細の前に, 概略を示す. 図 76 に示すように, 尾を平板とみなした 2 つの個体を考える. 個体の全長を L_b , 体高を H_b , 尾の長さ l_c とする. ただし, 本モデルでは 2.1 節の泳法型として, 幅広い魚種で用いられる準アジ型とアジ型泳法を模倣するため, 尾の長さは $l_c \sim 0.3L_b - 0.45L_b$ とし, 体高には様々な魚種の平均値 $H_b \sim 0.3L_b$ [174] を用いる. 直角座標 (X, Y) を体軸に沿って張り, 各方向の単位ベクトルを e_X, e_Y とする. 個体 1 と個体 2 それぞれの重心の位置 (体の中心) を $(X_1(t), Y_1 = 0), (X_2(t), Y_2 = d_\perp)$ とし, 重心速度 $\mathbf{V}_i(t) = (V_i(t), 0)$, ($i = 1, 2$) で X 軸と平行に一様な背景流れ $\mathbf{U} = (U, 0)$ に逆らいながら 1 次元的に推進するものとする. また, 尾は運動方程式に従ってヒンジ回りに回転し, 尾が X 軸となす角度を θ_i とする (ただし反時計回りを正とする). 加えて, 図 14 に示すように, 尾を除いた体の振動は尾の振動に比べ小さいため, 本モデルでは尾の振動のみを考える.

それぞれの個体の重心及び尾の運動方程式は以下のようなになる.

$$\frac{dX_i}{dt} = V_i \quad (84)$$

$$M \frac{dV_i}{dt} = F_{d,i} + F_{l,i} + F_{m,i} + F_{D,i} \quad (85)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i \quad (86)$$

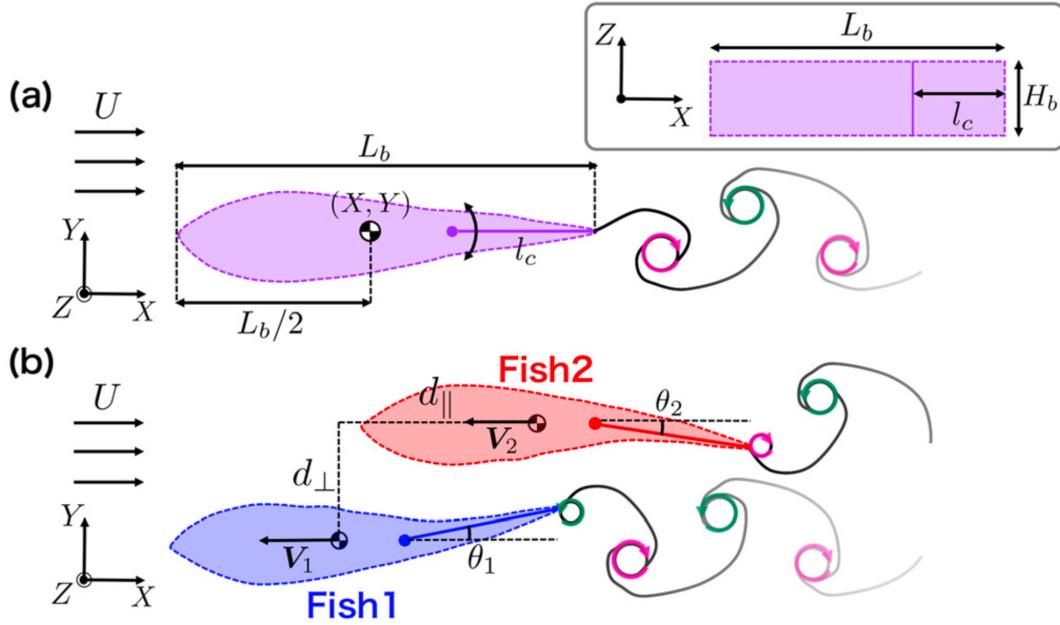


図 76: モデルの模式図. (a) 単独個体の模式図. 個体を全長が L_b の平板とみなし, 尾に相当する l_c の長さの平板がヒンジ周りに回転する. 挿入図は個体を横から見た図. (b) 2 個体の場合の模式図. 前後距離 $d_{||} = |X_1 - X_2|$ と横方向の距離 $d_{\perp} = Y_2$ を図のように定める.

$$I_c \frac{d\omega_i}{dt} = N_{d,i} + N_{l,i} + N_{m,i} + N_{e,i} + N_{a,i} \quad (87)$$

ここで, M は魚の質量, I_c はヒンジ周りの尾の慣性モーメント, $\omega_i = \omega_i \mathbf{e}_X \times \mathbf{e}_Y$ ($:= \omega_i \mathbf{e}_Z$) は尾の角速度ベクトルである. 式 (85), 式 (87) の各項の意味は次の通りである.

- 式 (85) の $F_{d,i}$, $F_{l,i}$ は尾に生じる抗力・揚力, 式 (87) の $N_{d,i}$, $N_{l,i}$ は尾に生じる抗力・揚力からくるトルク.
- 式 (85) の $F_{m,i}$ 尾に生じる付加質量による慣性力, 式 (87) の $N_{m,i}$ は尾に生じる慣性力のトルク.
- 式 (85) の $F_{D,i}$ は体全体に生じる抵抗力.
- 式 (87) の $N_{e,i}$ は尾の受動弾性からくるトルク.
- 式 (87) の $N_{a,i}$ は CPG による尾のアクティブな力からくるトルク.

以下では, それぞれの項について詳しく述べる.

8.1.2 質量, 尾の慣性モーメント

まず, 流体力学の関わらない項について示す. 式 (85) 左辺に出てくる質量 M には, 幅広い魚種に適用できる外挿公式

$$M = \rho L_b^2 H_b \quad (88)$$

を使用する [174]. ここで, ρ は魚体の有効密度で 41 kg m^{-3} とされる. 図 77 はこの公式の適用例であり, 実際の質量とよく一致していることがわかる.

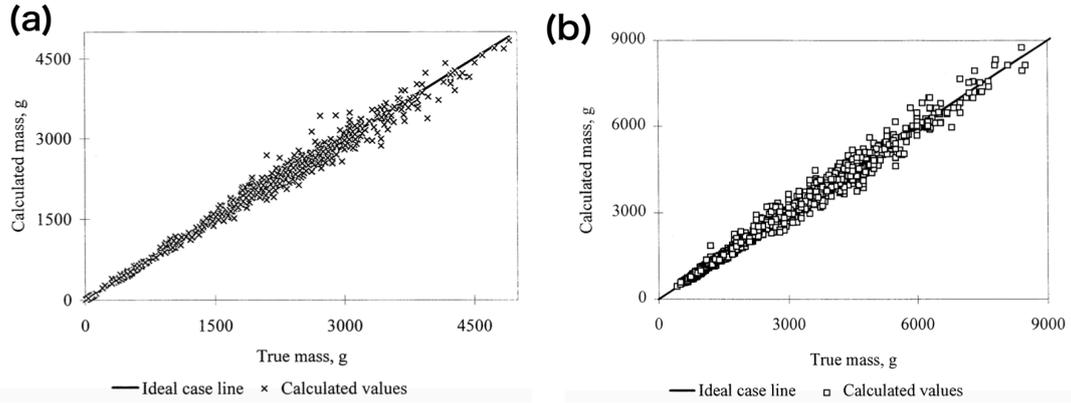


図 77: 質量外挿公式の適用例 [174]. 実際の測定値 (横軸) と外挿公式によって計算された値 (縦軸) を比較している. (a) キングサーモンの場合. (b) タイセイヨウサケの場合. 図は [174] より許可を得て転載.

また, 式 (87) 左辺の尾の慣性モーメント I_c は, 尾 (長方形平板翼) の面を ρ_b として定義通り計算すれば

$$I_c = \rho_b H_b \int_0^{l_c} dl^2 = \rho_b H_b \frac{l_c^3}{3} = \frac{M}{H_b L_b} H_b \frac{l_c^3}{3} = \frac{\rho}{3} H_b L_b l_c^3 \quad (89)$$

となる.

8.1.3 尾の弾性

式 (87) の $N_{e,i}$ はヒンジに作用する弾性トルクで, 弾性板のモデル [157] で使用された連続体表式のトルク (式 (82)) を模倣する. ヒンジが受けるトルクなので, 式 (82) の符号を反転し, 体に沿った空間微分を $\partial_x \sim l_c^{-1}$, 尾の先端の横変位を $y_c = l_c \sin \theta$ と置き換えることで, 曲率が $\sim l_c \sin \theta / l_c^2$ と評価できる. 従って,

$$N_{e,i} = -\frac{B}{l_c} \sin \theta_i e_Z \quad (90)$$

と定式化される. ここで, B はヤング率と断面二次モーメントの積としての曲げ剛性で, 死魚の曲げ剛性を用いる [175]. ここで, 弾性トルクやアクティブトルクは内力であるので, 重心の運動方程式には関わってこない [157].

8.1.4 尾のアクティブトルク

続いて, 式 (87) の $N_{a,i}$ は CPG (2.5.1 節) に由来するアクティブトルクである. CPG を表現する詳細な神経モデル (左右の神経系が交互に興奮するような力学系) [176, 177] も存在するが, ここでは変数の削減のため, 以下のような単純なものとする.

$$N_{a,i} = N_{a,i}(t) \sin(2\pi f_a t + \phi_{0,i}(t)) e_Z. \quad (91)$$

ここで f_a は CPG の左右交互発火の振動数である. アクティブトルクの振幅 $N_{a,i}(t)$ と位相 $\phi_{0,i}(t)$ は時間発展で変動し, CPG の情報が運動神経, 筋肉へと伝わる過程で生じる

ノイズに起因する．具体的には，振幅の時間発展はオルンシュタイン-ウーレンベック過程 [178] によって

$$\frac{dN_{a,i}}{dt} = \frac{1}{\tau_a}(\hat{\nu}_a - N_{a,i}) + \hat{\eta}_{a,i} \quad (92)$$

と表す． $\hat{\nu}_a$ は目標となる振幅， τ_a は目標値 $\hat{\nu}_a$ への減衰にかかる時定数， $\hat{\eta}_{a,i}$ はホワイトガウスノイズである．また，位相の時間発展はウィーナー過程 [178] によって

$$\frac{d\phi_{0,i}}{dt} = \hat{\eta}_{\phi,i} \quad (93)$$

と表す． $\hat{\eta}_{\phi,i}$ もホワイトガウスノイズである．ガウスノイズの詳細については，後に方程式を無次元化した際に述べる．

8.1.5 ランキン渦列場

流体力学が絡む項について示す．まず初めに，様々な項に絡んでくるランキン渦列場 (2.6.1 節) を定義する．ひとつひとつのランキン渦はコア半径 r_R を持ち，尾の角速度 ω_i の符号が切り替わるタイミングで尾の先端から放出される． ω_i が正から負に転じるときには正の循環 $+\Gamma$ を持った反時計回りのランキン渦が， ω_i が負から正に転じるときには負の循環 $-\Gamma$ を持った時計回りのランキン渦が放出される．循環の大きさ Γ は，振動翼による逆カルマン渦生成の実験から以下の式で表される [179, 180].

$$\Gamma = C_\Gamma \frac{\pi^2}{2} A^2 f. \quad (94)$$

ここで， C_Γ は渦の強度を調整するパラメタ， A は振動翼の振幅， f は振動翼の振動数である．この表式は翼表面の境界層がもたらす循環の表式を模して仮定されている．

本モデルでは，尾の先端の横変位 $y_c(t) = l_c \sin \theta(t)$ を時間の関数としてヒルベルト変換 (付録 A) することで，振幅 $A(t)$ と位相 $\phi(t)$ 並びに振動数 $f(t) = (1/2\pi) \times d\phi/dt$ を計算する．ただし，ヒルベルト変換の数値計算上の都合により，瞬間の振幅 $A(t)$ ，振動数 $f(t)$ はシミュレーション終了後に尾運動の時系列データを入手してからでないと計算できない．よって，循環の大きさ (式 (94)) の振幅，振動数を現在時刻 t で逐次的に求めることはできないため，振幅，振動数は定数で置き換えておく必要がある．振幅については，期待値が 2.3 節で述べた典型的な振幅 $A_0 = 0.1 \text{ BL}$ をとるようにアクティブトルクの強さ $\hat{\nu}_a$ を調整する (8.2.5 節も参照)．また，ヒルベルト変換で求まる振動数 $f(t)$ はほとんどアクティブトルクの振動数 f_a に等しいことがシミュレーションで示せるため，式 (94) の f を f_a で置き換える．従って，本モデルでの循環は

$$\Gamma = C_\Gamma \frac{\pi^2}{2} A_0^2 f_a \quad (95)$$

という定数に設定される．

また，3.3.2 節の実験 [75] と同じく，放出後の渦は背景流れ U に乗って X 軸正の方向に流されていくとする．このとき，格子型振動翼モデルの先行研究 [172] と同様に，循環は時定数 τ_Γ で指数関数的に減衰していくとする．以上をまとめると，渦列場は以下のように定式化される．

$$\mathbf{u}(X, Y, t) = \sum_{i=1,2} \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{t-t_{n_i}}{\tau_\Gamma}\right) \mathbf{u}_R(X - X_{n_i} - U(t-t_{n_i}), Y - Y_{n_i}; s_{n_i} \Gamma) \quad (96)$$

$$\mathbf{u}_R(\Delta X, \Delta Y; \Gamma_R) = \begin{cases} \frac{\Gamma_R}{2\pi} \frac{(-\Delta Y, \Delta X)}{r_R^2} & [\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} < r_R] \\ \frac{\Gamma_R}{2\pi} \frac{(-\Delta Y, \Delta X)}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} & [\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} > r_R] \end{cases} \quad (97)$$

$$X_{n_i} = X_i(t_{n_i}) + \frac{L_b}{2} - l_c(1 - \cos \theta_i(t_{n_i})), \quad Y_{n_i} = Y_i(t_{n_i}) + l_c \sin \theta_i(t_{n_i}) \quad (98)$$

ここで、 n_i は個体 i が放出した渦の識別番号であり、 t_{n_i} は渦 n_i の放出された時刻、 s_{n_i} は渦 n_i の循環の符号、 X_{n_i} 、 Y_{n_i} は渦 n_i が放出された時刻での個体 i の尾の先端の位置を表す。また、 $X_{n_i} + U(t - t_{n_i})$ 、 Y_{n_i} は渦 n_i のコア中心の位置である。 $\mathbf{u}_R(\Delta X, \Delta Y; \Gamma_R)$ は式 (21) のランキン渦の表式そのものである。

8.1.6 尾の抗力・揚力

振動翼の周りに生じる流れ場は非定常な流れなので非常に複雑であり、抗力・揚力の定式化は難しい。従って、本研究では振動翼の先行モデル [155, 156] と同様に、振動翼周りの流れ場は準定常的であるとする。ここで準定常的とは、振動翼周りの流れ場は、各瞬間の振動翼の運動速度で平板翼が等速直線運動しているときに生じる定常流れ場に等しいと仮定することを意味する (非定常要素として付加質量による慣性力のみを組み込む)。このとき、角速度 ω でヒンジ周りを回転する平板翼の運動速度はヒンジから先端に向かって線形に増加するため、どの位置の運動速度を用いて定式化するかという問題が生じる。先行モデル [155, 156] の場合、2次元平板翼の圧力中心 (center of pressure, 流体力の合力の作用点) での運動速度を用いている。(2次元平板翼では、翼の周りの循環と揚力の関係を表すクッタ・ジュコーフスキーの定理から圧力中心は前方 4 分の 1 の点に存在することが理論的に知られている [39].) 本モデルでも、圧力中心での運動速度を採用するが、有限アスペクト比の平板翼では圧力中心は平板の中心点付近に移動すること [181] を考慮して圧力中心を平板の中心に定める。なお、本モデルでは $H_b \sim 0.3L_b$ 、 $l_c \sim 0.3L_b - 0.45L_b$ より、

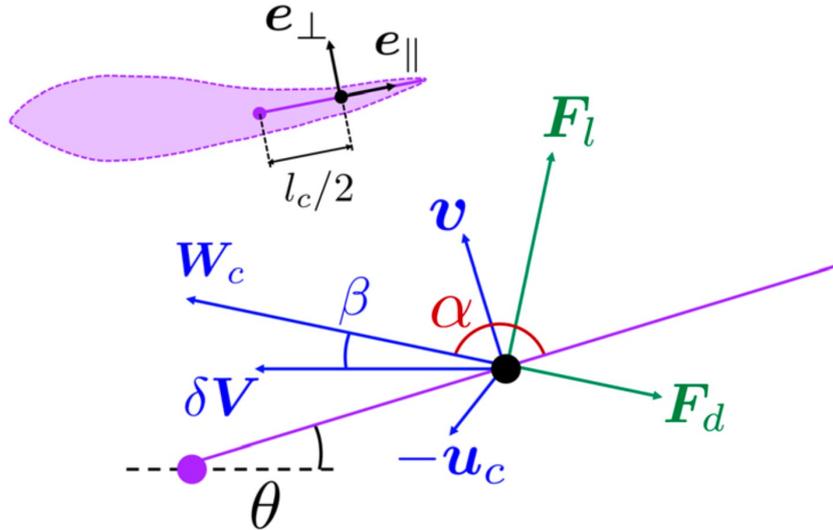


図 78: 迎え角 α と各速度, 抗力 F_d ・揚力 F_l の関係. 力は平板翼の中心点 (ヒンジから $l_c/2$ の位置) に作用する. \mathbf{v} は平板翼の中心点の運動速度, $\delta\mathbf{V}$ は重心の推進速度, \mathbf{u}_c は渦場の流れの速度, $\mathbf{W}_{c,i}$ は流れに対しての平板翼の相対速度である.

アスペクト比は $H_b/l_c \lesssim 1$ である。以下では、個体 i の尾の中心点での運動速度を

$$\mathbf{v}_i = \frac{l_c}{2} \omega_i (-\sin \theta_i, \cos \theta_i) = v_i (-\sin \theta_i, \cos \theta_i) \quad (99)$$

と記述する。また、渦場による流れ場も平板の中心での値を採用して定式化する。つまり、式 (96) において

$$\mathbf{u}_{c,i} := \mathbf{u}(X_{c,i}, Y_{c,i}, t), \quad (100)$$

$$X_{c,i} = X_i + \frac{L_b}{2} - l_c \left(1 - \frac{1}{2} \cos \theta_i\right), \quad Y_{c,i} = Y_i + \frac{l_c}{2} \sin \theta_i \quad (101)$$

を、個体 i の尾に作用する渦場による流速と定義する。また、図 78 に示すように、重心は推進速度 $\delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{U}$ で運動し、平板翼は流れに対して相対速度 $\mathbf{W}_{c,i} = \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{V}_i - \mathbf{u}_{c,i}$ で等速直線運動しているとみなす。 $\mathbf{W}_{c,i}$ と平板翼のなす角度を迎え角 α と定義する。

このとき、抗力 $\mathbf{F}_{d,i}$ 、揚力 $\mathbf{F}_{l,i}$ は、以下のように表される。

$$\mathbf{F}_{d,i} = \frac{1}{2} \rho_w C_d(\alpha_i) H_b l_c \mathbf{W}_{c,i}^2 \mathbf{e}_{d,i}, \quad (102)$$

$$\mathbf{F}_{l,i} = \frac{1}{2} \rho_w C_l(\alpha_i) H_b l_c \mathbf{W}_{c,i}^2 \mathbf{e}_{l,i}, \quad (103)$$

$$\mathbf{e}_{d,i} = (\cos \beta_i, -\sin \beta_i), \quad \mathbf{e}_{l,i} = (\sin \beta_i, \cos \beta_i), \quad (104)$$

ここで、 ρ_w は水の密度、 $C_d(\alpha_i)$ は抗力係数、 $\mathbf{e}_{d,i}$ は抗力方向の単位ベクトル、 $C_l(\alpha_i)$ は揚力係数、 $\mathbf{e}_{l,i}$ は揚力方向の単位ベクトルである。また、 β_i は時計回りを正とする相対速度 $\mathbf{W}_{c,i}$ と $-\mathbf{e}_X$ のなす角であり

$$\beta_i = -\arctan\left(\frac{(\mathbf{W}_{c,i})_Y}{(\mathbf{W}_{c,i})_X}\right) = \arctan\left(\frac{v_i \cos \theta_i - u_{cY,i}}{v_i \sin \theta_i - \delta V_i + u_{cX,i}}\right) \quad (105)$$

と表される。迎え角 α_i は幾何学的に考えて、 θ_i と β_i を用いて

$$\alpha_i = \pi \left\lceil \frac{\theta_i + \beta_i}{\pi} \right\rceil - (\theta_i + \beta_i) \quad (106)$$

となる。ここで、 $\lceil \cdot \rceil$ は天井関数であり、迎え角で $\alpha_i \in [0, \pi]$ の範囲に定義される (例えば、図 78 のような状況では、 $0 < \theta_i + \beta_i < \pi$ なので、 $\alpha_i = \pi - (\theta_i + \beta_i)$ となる)。

抗力係数、揚力係数については有限アスペクト比の平板翼 [181] の場合でも、2次元平板翼の表式 [182]

$$C_d^{2D}(\alpha) = 2 \sin^2 \alpha, \quad (107)$$

$$C_l^{2D}(\alpha) = \begin{cases} 2\pi \sin \alpha & [\alpha < \alpha_s^{2D}], \\ \sin 2\alpha & [\alpha > \alpha_s^{2D}, \alpha < \pi - \alpha_s^{2D}], \\ -2\pi \sin \alpha & [\alpha > \pi - \alpha_s^{2D}] \end{cases} \quad (108)$$

と定性的には同じになる (図 79)。ここで、 $\alpha_s^{2D} \sim 10^\circ$ は揚力の失速角で、この角度を超えると平板翼上面の境界層に剥がれが生じて揚力が急減する。実験 [181] から、有限アスペクト比の効果はおおよそ係数や失速角のみに生じ、

$$C_d(\alpha) = c_d \sin^2 \alpha, \quad (109)$$

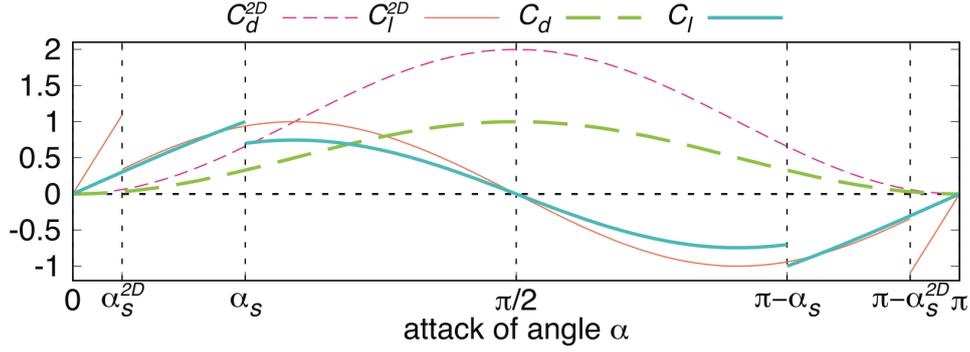


図 79: 2次元平板翼と有限アスペクト比平板翼の抗力係数, 揚力係数の迎え角依存性 [181, 182].

$$C_l(\alpha) = \begin{cases} c_{l0} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_s} & [\alpha < \alpha_s], \\ c_l \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_s} & [\alpha > \alpha_s, \alpha < \pi - \alpha_s], \\ -c_{l0} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_s} & [\alpha > \pi - \alpha_s] \end{cases} \quad (110)$$

と見積もることができる ($c_d \sim 1.0$, $c_{l0} \sim 1.0$, $c_l \sim 0.7$, $\alpha_s \sim 35^\circ$, 図 79 も参照). 2次元平板翼に比べ抗力係数が小さくなることは, 定性的には有限の幅の影響で流れが幅の方向に逃げやすくなるためと理解でき, 失速角の増大は, 有限の幅のために境界層の剥がれが背景一様流れによって抑制されることからくる.

最終的に式 (85) の $F_{d,i}$, $F_{l,i}$, 及び式 (87) の $N_{d,i}$, $N_{l,i}$ は, 式 (102), (103) の抗力・揚力を用いて

$$F_{d,i} + F_{l,i} = (\mathbf{F}_{d,i} + \mathbf{F}_{l,i}) \cdot \mathbf{e}_X = \frac{1}{2} \rho_w C_F(\alpha_i, \beta_i) H_b l_c \mathbf{W}_{c,i}^2, \quad (111)$$

$$C_F(\alpha_i, \beta_i) = C_d(\alpha_i) \cos \beta_i + C_l(\alpha_i) \sin \beta_i, \quad (112)$$

$$\mathbf{N}_{d,i} + \mathbf{N}_{l,i} = \frac{l_c}{2} \mathbf{e}_{\parallel,i} \times (\mathbf{F}_{d,i} + \mathbf{F}_{l,i}) = \frac{1}{4} \rho_w C_N(\alpha_i, \theta_i + \beta_i) H_b l_c^2 \mathbf{W}_{c,i}^2 \mathbf{e}_Z, \quad (113)$$

$$C_N(\alpha_i, \theta_i + \beta_i) = -C_d(\alpha_i) \sin(\theta_i + \beta_i) + C_l(\alpha_i) \cos(\theta_i + \beta_i) \quad (114)$$

となる ($\mathbf{e}_{\parallel,i} = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ は平板に平行な方向の単位ベクトルである).

8.1.7 尾の付加質量による力

続いて, 付加質量による慣性力を定式化する. ここでも, 尾のどの点の加速度を用いるかという問題が出てくるが, 先行モデル [155, 156] にならって, 平板翼の中心点での加速度で近似する. つまり, 中心点での加速度 (の平板に垂直な成分) で平板全体が等加速度運動しているとみなす. 従って, 有限アスペクト比の平板翼の付加質量を m_e として,

$$\mathbf{F}_{m,i} = -m_e \frac{d(v_i - \delta V_i \sin \theta_i)}{dt} \mathbf{e}_{\perp,i} \quad (115)$$

が慣性力となる ($\mathbf{e}_{\perp,i} = (-\sin \theta_i, \cos \theta_i)$ は平板に垂直な方向の単位ベクトルである). ここで付加質量 m_e は, 有限アスペクト比の平板翼では

$$m_e = \frac{\pi}{4} K \rho_w H_b^2 l_c \quad (116)$$

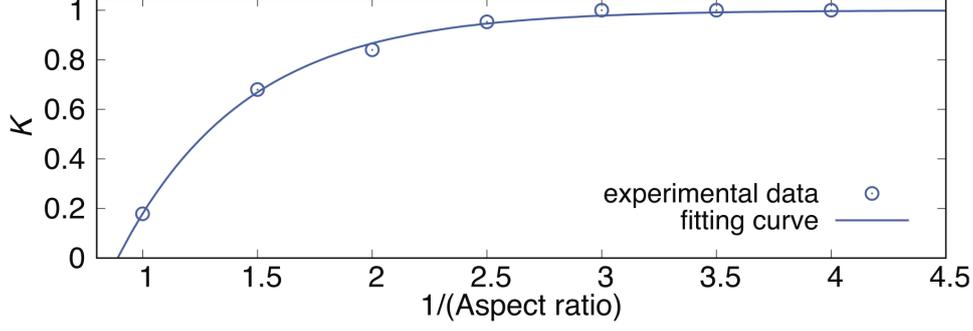


図 80: 付加質量に対する補正因子 K のアスペクト比依存性. 横軸はアスペクト比 H_b/l_c の逆数. 実験値 [183](丸点) と式 (117) フィッティング線 (実線, $a_K \simeq 1.82$, $b_K \simeq 0.89$) を示す.

と与えられる [183]. ここで $K(\leq 1)$ は, 2次元平板翼の付加質量に対する補正因子であり, アスペクト比の逆数 l_c/H_b の関数となる. 2次元平板翼を仮定した場合の付加質量 (付録 E) と比べると, 関数 K の違いがある. 定性的にはアスペクト比 $H_b/l_c \lesssim 1$ が大きくなるほど, 平板翼の側方へ流体の流れの逃げ道ができるので付加質量が小さくなることを意味し, これが K が小さくなることに反映されている. 図 80 は, K の実験値とフィッティング曲線

$$K = 1 - \exp\{-a_K((H_b/l_c)^{-1} - b_K)\} \quad (117)$$

を示す.

以上より, 式 (85) の $F_{m,i}$, 及び式 (87) の $N_{m,i}$ は以下のように定義される.

$$\mathbf{F}_{m,i} = \mathbf{F}_{m,i} \cdot \mathbf{e}_X = \frac{\pi}{4} K \rho_w H_b^2 l_c \sin \theta_i \frac{d(v_i - \delta V_i \sin \theta_i)}{dt}, \quad (118)$$

$$\mathbf{N}_{m,i} = \frac{l_c}{2} \mathbf{e}_{\parallel,i} \times \mathbf{F}_{m,i} = -\frac{\pi}{8} K \rho_w H_b^2 l_c^2 \frac{d(v_i - \delta V_i \sin \theta_i)}{dt} \mathbf{e}_Z. \quad (119)$$

8.1.8 体にかかる抵抗

最後に体にかかる摩擦抵抗力の項 (式 (85) の $F_{D,i}$) の表式は

$$F_{D,i} = -\text{sgn}(\delta V_i - u_{mX,i}) \rho_w C_D H_b L_b (\delta V_i - u_{mX,i})^2 \quad (120)$$

となる. ここで, $\text{sgn}(o)$ は符号関数, C_D は体の抗力係数である. また, $u_{mX,i}$ は体の重心における流速式 (96) において

$$\mathbf{u}_{m,i} = \mathbf{u}(X_i, Y_i, t) \quad (121)$$

の X 成分である. 体にかかる抗力を計算するのに重心の位置での流速を用いるのは, 粗い近似ではあるが, このように代表点を決めることで, 連続体モデルに比べて計算コストが抑えられる.

8.1.9 時間発展方程式の整理

ここまでで力, トルクの表式が揃ったため, モデルの基本方程式 (運動方程式 (85), (87), アクティブトルクの振幅, 位相の時間発展方程式 (92), (93)) をまとめる. ただし, 長さの単位を $1 \text{ BL} \rightarrow 1 (L_b \rightarrow 1)$, 時間の単位を $1 \text{ s} \rightarrow 1$ として無次元化し, 特徴的な長さに対応する無次元量 $\chi_c = l_c/L_b$, $\chi_h = H_b/L_b$ を導入している. また, 他の定数は $\chi_\rho = \rho_w/\rho$, $b = B/ML_b^3$, $\nu_a = \hat{\nu}_a/ML_b^2$ であり, アクティブトルクの振幅の変数は $n_{a,i} = N_{a,i}/ML_b^2$ と規格化する. これにより, 時間発展方程式は以下ようになる.

$$\mathcal{M}_i \frac{d\delta V_i}{dt} = \mathcal{A}_i \frac{d\omega_i}{dt} + \mathcal{F}_i \quad (122)$$

$$\mathcal{I}_i \frac{d\delta\omega_i}{dt} = \mathcal{B}_i \frac{d\delta V_i}{dt} + \mathcal{N}_i \quad (123)$$

$$\frac{dn_{a,i}}{dt} = \frac{1}{\tau_a}(\nu_a - n_{a,i}) + \sqrt{2D_a}\eta_{a,i} \quad (124)$$

$$\frac{d\phi_{0,i}}{dt} = \sqrt{2D_\phi}\eta_{\phi,i} \quad (125)$$

式 (122) が推進速度 δV_i の時間発展方程式, 式 (123) が尾の角速度 ω_i の時間発展方程式である. 式 (122), (125) においては, それぞれ

$$\mathcal{M}_i = 1 + \frac{\pi}{4}\chi_\rho\chi_c\chi_h K \sin^2 \theta_i \quad (126)$$

$$\mathcal{I}_i = 1 + \frac{3\pi}{16}\chi_\rho\chi_h K \quad (127)$$

$$\mathcal{A}_i = \frac{\pi}{8}\chi_\rho\chi_c^2\chi_h K \sin \theta_i \quad (128)$$

$$\mathcal{B}_i = \frac{3\pi}{8} \frac{\chi_\rho\chi_h}{\chi_c} K \sin \theta_i \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i = & \frac{1}{2}\chi_\rho\chi_c C_F(\alpha_i, \beta_i) \mathbf{W}_{c,i}^2 - \frac{\pi}{4}\chi_\rho\chi_c\chi_h K \sin \theta_i \cos \theta_i \omega_i \delta V_i \\ & - \text{sgn}(\delta V_i - u_{mX,i}) \chi_\rho C_D (\delta V_i - u_{mX,i})^2 \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i = & \frac{3}{4} \frac{\chi_\rho}{\chi_c} C_N(\alpha_i, \theta_i + \beta_i) \mathbf{W}_{c,i}^2 + \frac{3\pi}{8} \frac{\chi_\rho\chi_h}{\chi_c} K \cos \theta_i \omega_i \delta V_i \\ & - 3 \frac{b}{\chi_c^4} \sin \theta_i + 3 \frac{n_{a,i}}{\chi_c^3} \sin(2\pi f_a t + \phi_{0,i}) \end{aligned} \quad (131)$$

である. 式 (124), (123) がアクティブトルクの時間発展方程式である. D_a , D_ϕ はノイズの方程式中の拡散係数で, $\eta_{a,i}$, $\eta_{\phi,i}$ は分散が 1 のホワイトガウスノイズである.

ここで, 式 (122), (123) は数値積分をして解くため,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i & -\mathcal{A}_i \\ -\mathcal{B}_i & \mathcal{I}_i \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \mathcal{N}_i \end{bmatrix} \quad (132)$$

と行列表示したのち, 左辺の行列の逆行列を作用させて

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{M}_i\mathcal{I}_i - \mathcal{A}_i\mathcal{B}_i} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_i & \mathcal{B}_i \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \mathcal{N}_i \end{bmatrix} \quad (133)$$

という方程式を積分する.

8.1.10 各パラメタ値の実験値との対応

ここで、各パラメタの見積もりと、実験値との対応についてまとめる (表 2 を参照)。

- 尾の長さ (体のうねりの可動領域) l_c は先述の通り、アジ型、準アジ型泳法 [36,37] に習って 0.3-0.45 BL に設定する。
- 体の抗力係数 $C_D = 0.037$ はレイノルズ数が $Re \sim 10^5$ における 2 次元流線型翼 (NACA0012) の抗力係数に等しく設定している [184]。実際、この値はレイノルズ数が $Re \sim 10^4$ - 10^5 における死魚の抗力係数に近い値である [185]。
- 尾の抗力・揚力係数に関わるパラメタ c_d , c_{l0} , c_l , α_s については、アスペクト比 $\lesssim 1$ の平板翼の実験から読み取った [181]。(本モデルでの尾のアスペクト比も $H_b/l_c \lesssim 1$ である。)
- ランキン渦の循環は、ブルーギルでの定常遊泳の実験 [67,68] から $\Gamma \sim 15$ - $60 \text{ cm}^2/\text{s}$ なので、体長ベースにすると $\Gamma \sim 0.06$ - $0.025 \text{ BL}^2/\text{s}$ となる。従って、式 (95) より $C_\Gamma = \frac{2\Gamma}{\pi^2 A_0^2 f_a}$ なので、 $f_a \sim \mathcal{O}(1) \text{ s}^{-1}$ では、 $C_\Gamma \sim \mathcal{O}(0.1)$ - $\mathcal{O}(1.0)$ のオーダーになる。
- パンプキンシード (淡水魚) の場合、体後方の曲げ剛性は $B \sim 10^{-4} \text{ N m}^2$ のオーダーである [175]。また、パンプキンシードの体長は $L_b = 0.13 \text{ m}$ で、質量は式 (88)

表 2: パラメタのリスト。本モデルではリスケールされた値を使用する ($L_b = 1 \text{ BL} = 1$, $1 \text{ s} = 1$)。また AT はアクティブトルクの略である。

記号	定義	実験値	採用値 (リスケール済み)
L_b	体長	1 BL	1
H_b	体高	$\sim 0.3 \text{ BL}$ [174]	0.3
l_c	尾の長さ	~ 0.3 - 0.5 BL [36,37]	0.3-0.45
χ_h	H_b/L_b	-	0.3
χ_c	l_c/L_b	-	0.3-0.45
A_0	尾運動の振幅	$\sim 0.1 \text{ BL}$ [44-48]	0.1
ρ	魚体有効密度	$\sim 41 \text{ kg m}^{-3}$ [174]	-
ρ_w	水の密度	$\sim 1000 \text{ kg m}^{-3}$	-
χ_ρ	ρ_w/ρ	-	25
C_D	体の抗力係数	~ 0.02 - 0.07 [185]	0.037 [184]
c_d	尾の抗力係数のパラメタ	~ 1.0 [181]	1.0
c_{l0}	尾の揚力係数のパラメタ (失速前)	~ 1.0 [181]	1.0
c_l	尾の揚力係数のパラメタ (失速後)	~ 0.7 [181]	0.7
α_s	失速迎え角	$\sim 35^\circ$ [181]	35°
r_R	ランキン渦のコア半径	~ 0.04 - 0.05 BL [47,186]	0.04
Γ	ランキン渦の循環	~ 0.06 - $0.25 \text{ BL}^2/\text{s}$ [67,68]	-
C_Γ	ランキン渦の強度	-	0.0-2.0
τ_Γ	ランキン渦の減衰時間	2.0 s [172]	2.0
b	曲げ剛性	$\sim 1.0 \text{ s}^{-2}$ [175]	1.0
f_a	AT の振動数	-	1.0-7.5
τ_a	AT の振幅の時定数	-	1.0
D_a	AT の振幅の拡散係数	-	0-1.0
D_ϕ	AT の位相の拡散係数	-	0-1.0
d_\perp	2 個体の横方向の距離	-	0.2-0.4

表 3: 付加質量の補正因子 K の χ_c 依存性

χ_c	0.300	0.325	0.350	0.375	0.400	0.425	0.450
K	0.18	0.30	0.40	0.48	0.55	0.62	0.67

より $M = \rho\chi_h L_b^3$ なので $b = B/ML_b^3 \sim 1.0 \text{ s}^{-2}$ と見積もられる.

- f_a に関しては, 定常遊泳でよく見られる振動数帯を採用した. ν_a は, 先述の通りヒルベルト変換で得られた振幅が A_0 になるように調整される. アクティブトルクの振幅の時間発展を支配するパラメータは τ_a と D_a の二つがあるため, $\tau_a = 1.0$ とする.
- 付加質量の補正因子 K の χ_c に対する依存性を表 3 に示す.

8.1.11 シミュレーションのセットアップ

シミュレーション方法と諸注意についてまとめる. 数値積分には, 確率常微分方程式を積分する基礎的な手法である Euler-Maruyama 法 [187] を用いる. 時間刻みは $dt = 0.0005$ とし, ホワイトガウスノイズ η は $\eta dt = \sqrt{dt} \times N(0, 1)$ に置き換えられる ($N(0, 1)$ は標準正規分布による乱数).

数値計算コストを削減するために, 放出された渦は十分時間が経った後に消去する. ここで, 十分時間が経ったという判定基準は

$$\exp\left(-\frac{t - t_{n_i}}{\tau_\Gamma}\right) \leq 10^{-3} \quad (134)$$

とする.

初期条件については, 単独遊泳の場合は

$$X_1 = 0, Y_1 = 0, \delta V_1 = -U, \theta_1 = 0, \omega_1 = 0, n_{a,1} = \nu_a, \phi_{0,1} \in [0, 2\pi] \quad (135)$$

とする. ただし, $\phi_{0,1} \in [0, 2\pi]$ は一様乱数によって生成される. また, 個体は X 軸の負の方向に進むので基本的に推進速度 δV_1 は負になる (例えば $\delta V_1 = -U$ は重心速度が $V_1 = 0$ を意味する). ペアでの遊泳では, 2 匹目の個体は

$$X_2 \in [-d_{\parallel, \max}, d_{\parallel, \max}], Y_2 = d_{\perp}, \delta V_2 = -U, \theta_2 = 0, \omega_2 = 0, n_{a,2} = \nu_a, \phi_{0,2} \in [0, 2\pi] \quad (136)$$

という初期条件を持つ. ここで $d_{\parallel, \max} = 2.5$ とする.

シミュレーション時間は $t_{\max} = 80.0$ とする. 尾運動の振幅, 位相を得るための尾の横変位 $\chi_c \sin \theta$ のヒルベルト変換 (付録 A) は, 高速フーリエ変換 [138] を用いて $t \in [t_{\max} - t_H, t_{\max}]$ の区間で実行する. ここで $t_H = 2^{17} \times dt = 65.536$ である.

8.2 単独遊泳での結果

前節のモデルによる数値計算の結果を次に示す. この節では単独遊泳についての結果を示す. (個体を識別する添え字 $i = 1, 2$ はこの節では省略する.)

8.2.1 尾の振幅の決定

はじめに、本モデルの基礎的な設定として、ヒルベルト変換で得られる尾の振幅を、様々な魚種に共通する標準振幅 $A_0 = 0.1$ (2.3 節) にどのように一致させるかについて述べる。単独遊泳の場合のコントロールパラメタは、アクティブトルクの振動数 f_a 、渦場の強度 C_Γ 、尾の長さ χ_c 、各種ノイズの拡散係数 D_a 、 D_ϕ の 5 つである。まず、ノイズが存在しない場合を考える。

このとき、各パラメタのセット (f_a, C_Γ, χ_c) に対して振幅 $A(t)$ の時間平均 \bar{A} が A_0 に最も近くなるように、アクティブトルクの振幅 ν_a を $\Delta\nu_a = 0.01$ または 0.001 の幅で調整する。時間平均は、ヒルベルト変換の時間幅にカットオフを加えた $t \in [t_{\max} - t_H + \delta t_{\text{cut}}, t_{\max} - \delta t_{\text{cut}}]$ において行われる (カットオフの値は具体的な場合に応じて決定する)。

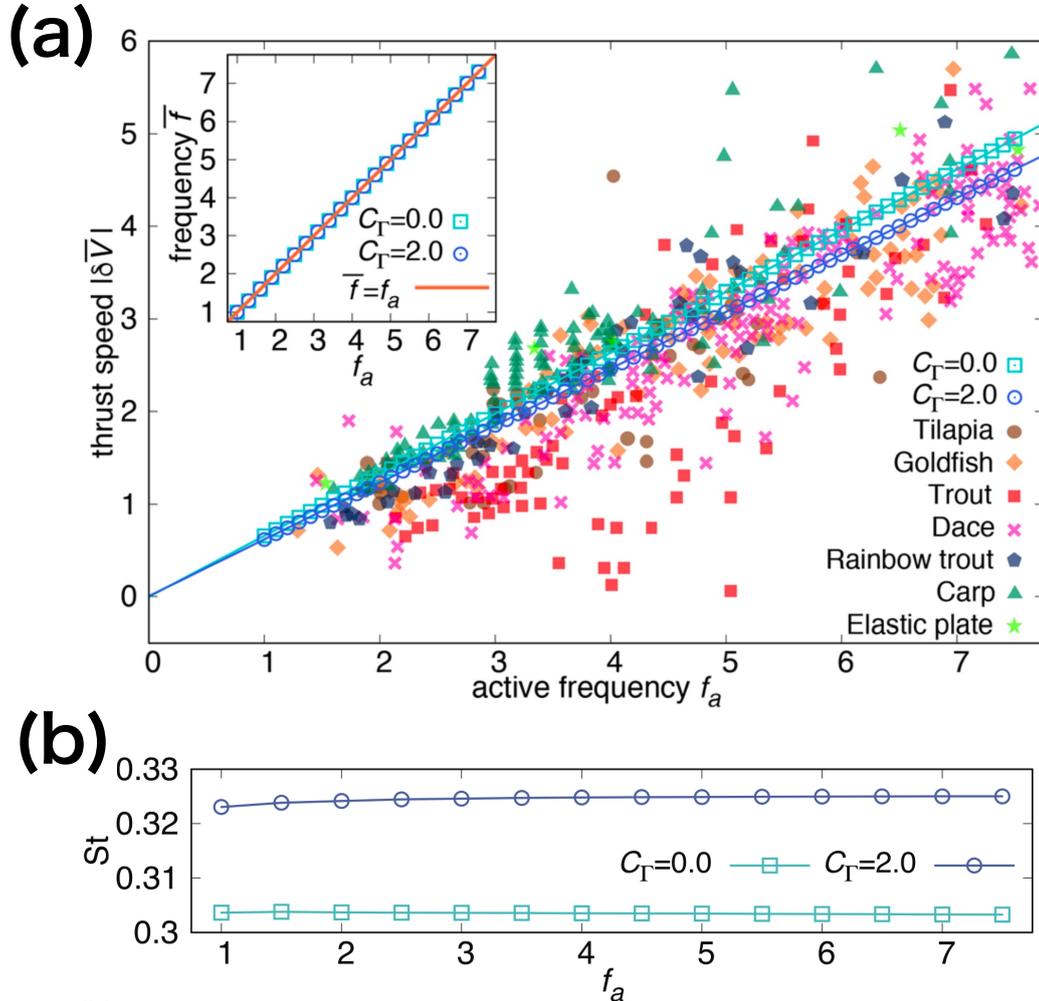


図 81: 単独遊泳の f_a 依存性. (a) 推進速度 $|\delta\bar{V}|$ と f_a の線形関係. 実線は $C_\Gamma = 0.0, 2.0$ でのフィッティング線 $|\delta\bar{V}| = \mu f_a + \mu'$ で、各点は実験やモデルによる結果である (表 4 を参照). ここで、実験値は文献 [44, 47, 188], 弾性板によるシミュレーションによる値は文献 [157] による. インセット: 尾の振動数 \bar{f} と f_a の関係. (b) ストローハル数 St と f_a の関係.

このカットオフは、フーリエ変換の窓関数効果によって区間両端で生じる誤差を避けるためのものである。以下では量 $Q(t)$ の時間平均を \bar{Q} と書く。

8.2.2 推進速度と尾運動の振動数の関係

2.3 節における推進速度と尾運動の振動数の線形関係が再現できるかどうかを見ることで、本モデルの妥当性を確かめる。推進速度を決定するのみなので、背景流れは $U = 0$ としても一般性は失われない。 $\chi_c = 0.375$, $C_\Gamma = 0.0, 2.0$, $f_a = 1.0-7.5$ において、尾の振幅が $\bar{A} = A_0$ となるときの推進速度 $|\delta\bar{V}|$ を計測する。ヒルベルト変換の時間幅のカットオフ時間は $\delta t_{\text{cut}} = 1.0$ とする。

図 81 にシミュレーション結果と既存の実験結果を示す。図 81(a) の $C_\Gamma = 0.0, 2.0$ のデータからわかるように、推進速度 $|\delta\bar{V}|$ はアクティブトルクの振動数 f_a に対してほぼ線形に増加する。これを

$$|\delta\bar{V}| = \mu \frac{2\pi f_a}{2\pi} + \mu' \quad (137)$$

としてフィッティングすると、表 4 の $C_\Gamma = 0.0, 2.0$ に示す結果を得る。他の実験や弾性板モデルの μ , μ' の値と比較しても、定性的によく一致していると主張できる。(実験値には μ' が負の大きい値をとるものもあるが、これは 2.3 節でも述べたように測定方法の揺らぎからくるものと考えられる。) また、図 81(a) のインセットはヒルベルト変換によって得られた尾の振動数の時間平均 \bar{f} と f_a がほぼ等しいことを示す。すなわち、推進速度 $|\delta\bar{V}|$ は実験的に観測される尾の振動数 \bar{f} に対しても線形関係にある。

図 81(a) に示すように渦の強度 C_Γ が大きくなると推進速度が低下する理由のひとつとしては、自己渦場により体の重心付近に $+X$ 軸方向に正味の流れが生じるために、体が受けるニュートン抵抗が上昇することが挙げられる。しかし、定常遊泳を行う魚に対して

表 4: 推進速度と尾の振動数の線形関係の傾き μ と切片 μ' 。T, B, N, A, G のデータはそれぞれ [188], [50], [44], [47] と [157] に対応する。

	μ	μ'
本モデル 渦なし ($C_\Gamma = 0.0$)	0.66	-0.002
本モデル 渦あり ($C_\Gamma = 2.0$)	0.61	-0.004
ティラピア, Tilapia (T)	0.576	0.0
キンギョ, Goldfish (N)	0.61	0.0
キンギョ, Goldfish (B)	0.64	-0.20
マス, Trout (N)	0.62	0.0
マス, Trout (B)	0.73	-1.13
ウグイ, Dace (N)	0.63	0.0
ウグイ, Dace (B)	0.74	-1.02
ニジマス, Rainbow trout (A)	0.67	-0.16
コイ, Carp (T)	0.695	0.0
弾性板モデル (G)	0.72	-0.12

$C_\Gamma = 2.0$ は大きい値であることを考えると、弾性体モデル [157] での結果と同様に、渦場は単独遊泳の定性的性質を変化させるほどの影響を持たないといつてよい。

図 81(b) にはストローハル数 St (式 (17)) と $2\pi f_a$ の関係を示す。ただしストローハル数の定義は

$$St = \frac{2\bar{A} \bar{f}}{|\delta V|} \quad (138)$$

である。本モデルでのストローハル数は $St = 0.30 \sim 0.33$ となり、弾性板のモデル [157] での $St \approx 0.1$ と比べても、魚のストローハル数 $St \approx 0.3$ とよく一致する (2.2.1 節)。

8.2.3 尾運動の軌跡

尾運動の横変位や速度についてみる。図 82 は、 $t \in [t_{\max} - 2\pi/2\pi f_a, t_{\max}]$ の尾運動の 1 周期分の時間幅において、尾の横変位 $y_c = \chi_c \sin \theta$ と横変位の速度 $v_c = dy_c/dt = \chi_c \omega \cos \theta$ の時間発展を示したものである。いずれの場合においても、 $y_c = 0$ に対して対称的な尾運動を行なっていることがわかり、この特徴は魚の定常遊泳時の尾運動軌跡とよく一致する。定量的にも、1.5 BL/s を超える程度の推進速度で定常遊泳するウグイやキンギョが 1-3 BL/s の最大横変位速度をとることと一致している (図 81(a) の推進速度と振動数の対応も参照)。 C_Γ に対する依存性が弱いことから、渦場は尾運動にほとんど影響を与えないことがわかる。

8.2.4 推進速度とストローハル数の C_Γ , χ_c 依存性

推進速度の C_Γ , χ_c 依存性を補足的に示す。以下では、標準的な定常推進速度 1.5 BL/s 程度 [75] をもたらす $f_a = 2.5$ にアクティブトルクの振動数を固定する。これに伴って、ヒルベルト変換の時間幅の端のカットオフ時間は $\delta t_{\text{cut}} = 1/f_a = 0.4$ とする。

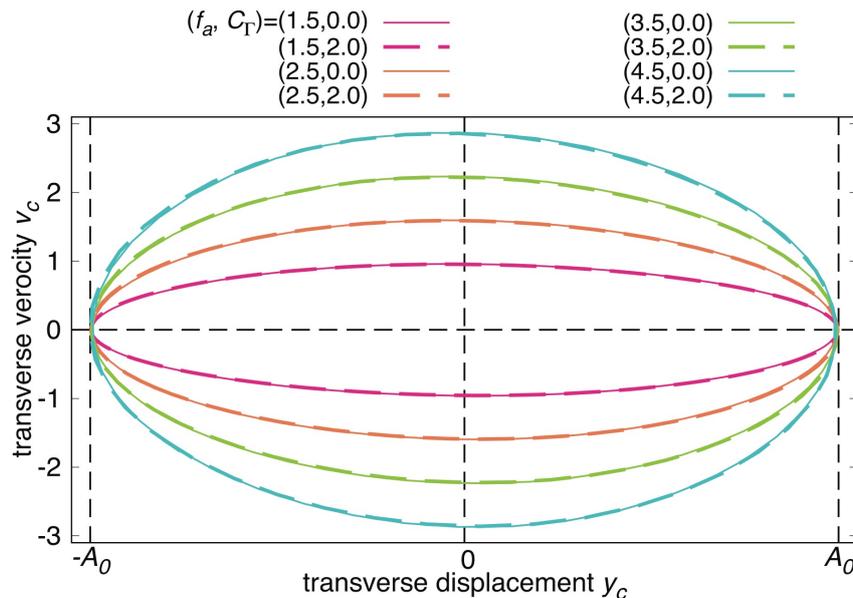


図 82: 尾の横変位 y_c と横変位速度 v_c の関係。各 f_a に対して実線が $C_\Gamma = 0.0$, 破線が $C_\Gamma = 2.0$ の場合である。

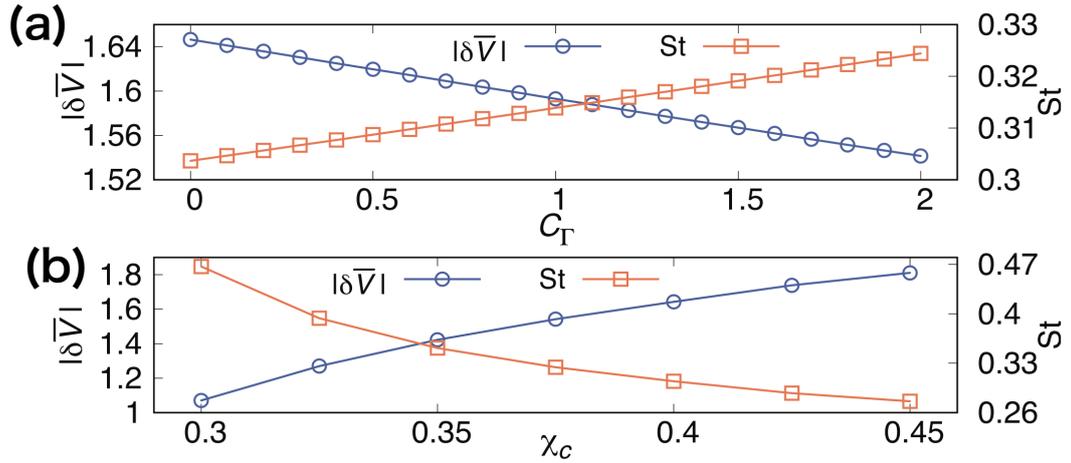


図 83: 推進速度 $|\delta\bar{V}|$ (左縦軸), ストローハル数 St (右縦軸) と他のパラメタの関係. (a) $\chi_c = 0.375$ での C_Γ の関数としての推進速度, ストローハル数. (b) $C_\Gamma = 2.0$ での χ_c の関数としての推進速度, ストローハル数.

図 83(a) は $\chi_c = 0.375$ における推進速度の C_Γ 依存性である. C_Γ の増加に伴って推進速度は減少し, 測定範囲内では線形に変化しているように見える. おそらく, 渦場の速度 \mathbf{u} が C_Γ に比例し, かつ方程式 (122), (123) において \mathbf{u} と $\delta\mathbf{V}$ が常にセットになって出現するため, 推進速度は C_Γ に比例すると考えられる.

また, 図 83(b) は $C_\Gamma = 2.0$ における, 推進速度の χ_c 依存性である. 体長に対する尾の長さ (可動領域) の割合 χ_c が増加すると推進速度も増加するが, 流れを受ける面積が広がると推進しやすくなるということは直感的にも妥当である. 特に, 付加質量の効果は有限アスペクト比の効果を表す K にも依存するため, 図 83(b) のような非線形的増加を示すと考えられる.

ストローハル数に関しては, その定義から, 推進速度の逆数として変化し, 概ね $St = 0.2-0.4$ の実験値を取ることがわかる.

8.2.5 重心速度, 振幅, 振動数に対するノイズの影響

ノイズの影響について示す. $\chi_c = 0.375$, $C_\Gamma = 2.0$ にセットし, D_a , D_ϕ を変化させることで, 重心速度 $V = U + \delta V$, 尾の振幅 A , 振動数 f の確率分布等を調べる. ただし, 実験系と合わせるため, ノイズがないときに重心速度 (の時間平均値) がゼロで定常遊泳するように, 背景流れを $U = |\delta V_0|$ に設定する. ここで, $|\delta V_0|$ は, パラメタセット (χ_c , C_Γ , $2\pi f_a = 2.5$, $D_a = 0.0$, $D_\phi = 0.0$) において, 振幅の時間平均値が $\bar{A} = A_0$ のときの推進速度の時間平均の絶対値 $|\delta\bar{V}|$ である.

量 $Q = V, A, f$ の確率分布を

$$P(Q) = \frac{1}{N_r(t_H - 2\delta t_{\text{cut}})} \sum_{n=1}^{N_r} \int_{t_{\text{max}} - t_H + \delta t_{\text{cut}}}^{t_{\text{max}} - \delta t_{\text{cut}}} dt \delta(Q - Q_n(t)) \quad (139)$$

と定義する ($\delta(o)$ はディラックのデルタ関数). ここで N_r はシミュレーション回数で,

$Q_n(t)$ は n 回目のシミュレーションでの $Q(t)$ の値である ($N_r = 1000$ とする). 量 Q の期

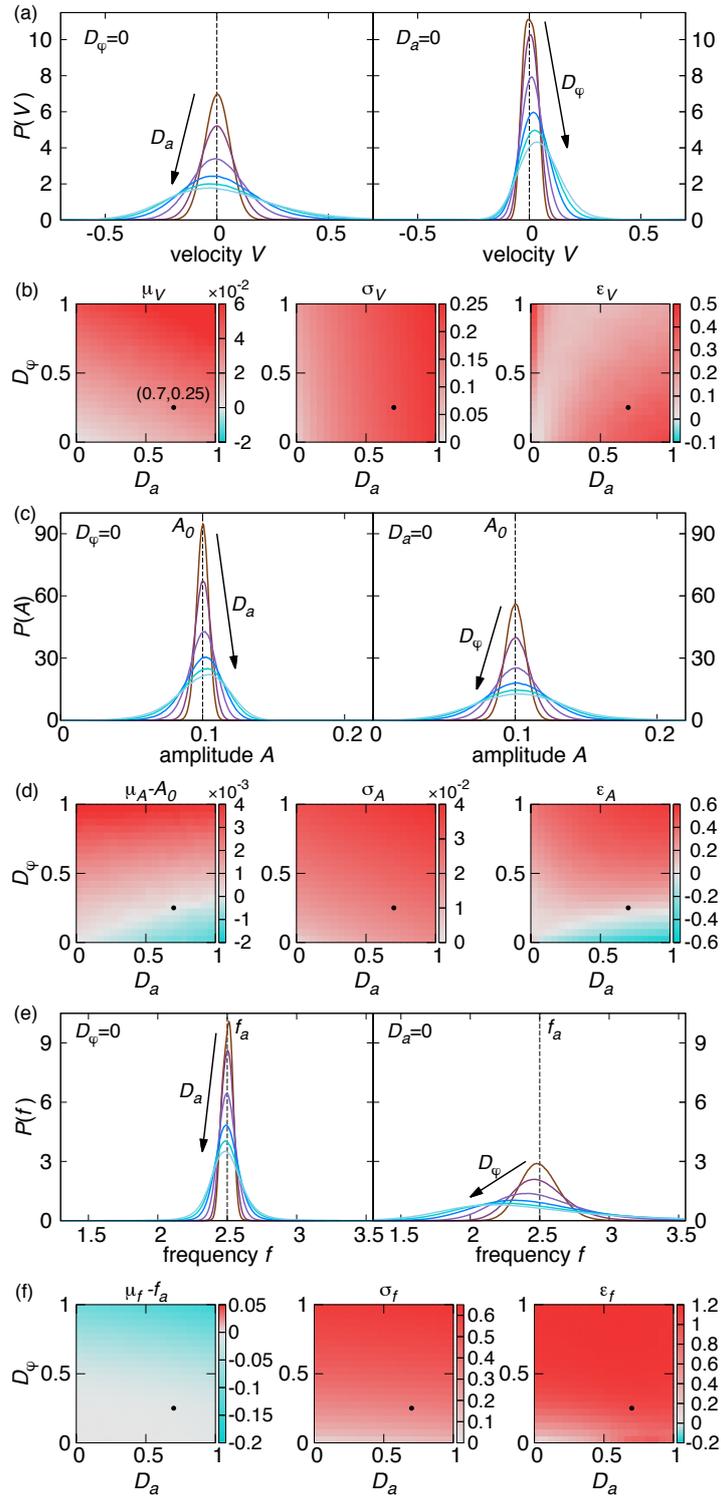


図 84: V , A , f に関する統計量の D_a , D_ϕ 依存性. (a) 確率分布 $P(V)$. 左図が $D_\phi = 0$ で D_a を変化させた場合, 右図が $D_a = 0$ で D_ϕ を変化させた場合に対応する. (b) 統計量 μ_V , σ_V , ϵ_V のカラーマップ. 黒点 ($D_a = 0.75$, $D_\phi = 0.25$) は本モデルで主に使用するパラメタを表す. 同様に A , f に対して, 図 (c)-(f) を示す.

期待値 μ_Q , 標準偏差 σ_Q , 歪度 ε_Q を以下のように定義する [189].

$$\mu_Q = \int dQ P(Q) Q, \quad (140)$$

$$\sigma_Q^2 = \int dQ P(Q) (Q - \mu_Q)^2, \quad (141)$$

$$\varepsilon_Q = \frac{1}{\sigma_Q^3} \int dQ P(Q) (Q - \mu_Q)^3. \quad (142)$$

ここで歪度 ε_Q は, 確率分布 $P(Q)$ が $Q > \mu_Q$ の領域に重みがあるのか ($\varepsilon_Q > 0$), $Q < \mu_Q$ に重みがあるのか ($\varepsilon_Q < 0$) を判定する統計値である.

図 84 に V , A , f に関するシミュレーション結果を示す. まず, 重心速度から見る. 図 84(a) は ($D_a, D_\phi = 0$) ないし ($D_a = 0, D_\phi$) として, 片方の拡散係数のみを増加させた場合の確率分布 $P(V)$ の変化である. 重心速度の分布の広がり, D_ϕ よりも D_a の方に強く影響を受けると言える. 実際, 図 84(b) の標準偏差のカラーマップからわかるように σ_V は D_a に強く依存している. 一方で, 期待値 μ_V の観点では D_a と D_ϕ は (D_ϕ の方が

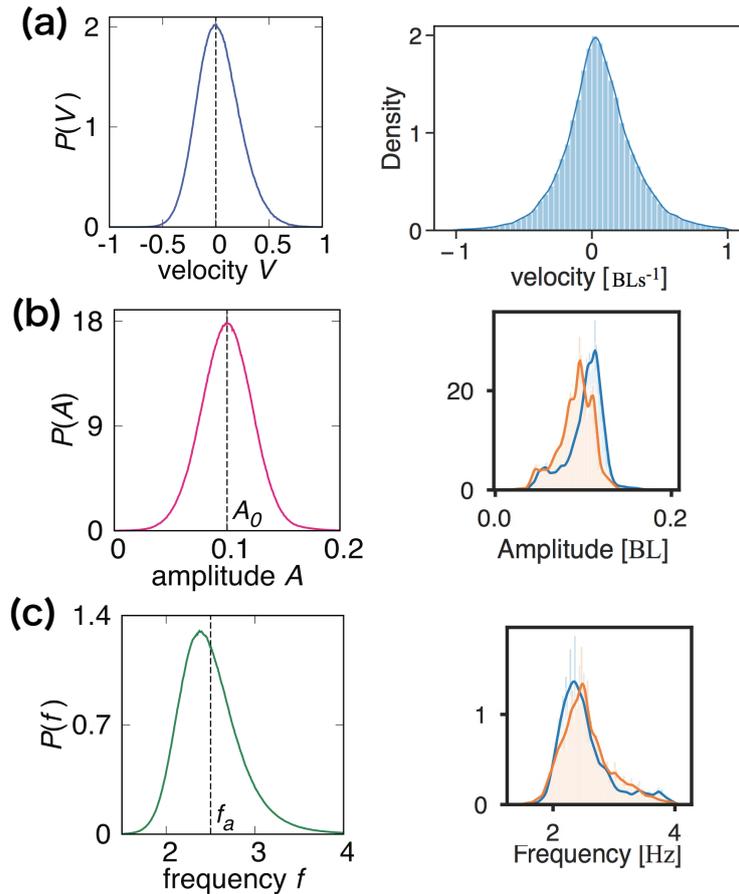


図 85: $D_a = 0.7$, $D_\phi = 0.25$ における V , A , f の確率分布 (左段) と 1.6 BL/s 程度で定常遊泳するキンギョの実験 [75] (右段) との比較. (a) $P(V)$ の比較. (b) $P(A)$ の比較. (c) $P(f)$ の比較. (b), (c) の実験のデータに関しては 2 匹分のデータを示している. 右段の図は [75] より許可を得て転載.

若干強いが) おおよそ等価に, 重心速度をゼロから上昇させる. 本モデルの座標系では個体は $-X$ 方向に推進するので, V が負の大きな値をとるほどよく推進できていることを意味する. 従って, この結果はノイズを加えると若干推進しにくくなることを意味する. あるいは, 歪度 ε_V も常に正であるため, 推進しにくくなる方 (V が正の方) に確率分布の重みが存在するという観点から解釈できる.

続いて, 振幅 A に対するノイズの影響をみる. 図 84(c) から, 確率分布の広がりに対する影響は定量的には D_ϕ の方が強いが, D_a による広がり大きな差はないことがわかる. 実際, 標準偏差 σ_A に対する影響では D_a と D_ϕ に顕著な差はない (図 84(d)). 期待値 μ_A は A_0 からの変動は小さいものの, D_a の増加により振幅は小さくなり, D_ϕ の増加は振幅の増加をもたらす. この傾向は歪度 ε_A に関しても同じである. 従って, 期待値のシフトに関して D_a と D_ϕ の効果は相反するため, 適当な (D_a, D_ϕ) では $\mu_A = A_0$ に近くなる.

最後に, 振動数 f に対する結果を示す. 図 84(e, f) から確率分布, 期待値, 標準偏差, 歪度, いずれも D_ϕ の影響を強く受けることがわかる. 特に, 期待値 μ_f (図 84(f)) から, D_ϕ の上昇によって振動数は f_a から顕著に減少する. つまりノイズが加わるとゆっくりと尾を動かすようになる. 加えて, 推進速度と振動数の線形関係を考えれば, 図 84(b) で見た重心速度の減少と結びついている.

以上の D_a, D_ϕ 依存性を踏まえて, $D_a = 0.7, D_\phi = 0.25$ にノイズのパラメタ (拡散係数) を固定する. この場合, それぞれの期待値 μ_V, μ_A, μ_f の $V = 0, A = A_0, f_a$ からのずれは数パーセントにとどまり, 循環 Γ の算出時に用いた近似式 (95) はそのまま適用可能な範囲にある. また, このノイズパラメタでは図 85 に示すように, キンギョの実験 [75] による確率分布とも高さや裾の広がり具合が定性的に一致する.

8.2.6 尾運動の位相とエネルギー散逸率

尾運動のエネルギーコストについて述べる. まず, ヒルベルト変換で求まる位相 ϕ の確率分布

$$P(\phi) = \frac{1}{N_r(t_H - 2\delta t_{\text{cut}})} \sum_{n=1}^{N_r} \int_{t_{\text{max}} - t_H + \delta t_{\text{cut}}}^{t_{\text{max}} - \delta t_{\text{cut}}} dt \delta(\phi - \phi_n(t)) \quad (143)$$

を示す (ここでは $N_r = 10^4$ とする). 仮に一様分布であれば $P(\phi) = 1/2\pi$ となる. 図 86 から, 確率分布 $P(\phi)$ は ϕ に対して周期的に変化する. つまり, 尾運動の位相は一定の角振動数で時間発展するわけではないことを意味する. $P(\phi)$ が小さくなる位相 ($-\pi \lesssim \phi \lesssim -\pi/2, 0 \lesssim \phi \lesssim \pi/2$) で振動数 f は大きく, $P(\phi)$ が大きくなる位相 ($-\pi/2 \lesssim \phi \lesssim 0, \pi/2 \lesssim \phi \lesssim \pi$ の領域) で振動数は小さくなる. また, 図 86 は位相に対する尾の横変位 y_c と横変位速度 v_c についても示している. ヒルベルト変換の性質上 (付録 A), $\phi = 0$ は尾を $+Y$ 方向に最大に振った状態, $\phi = \pi/2$ は尾が体軸中心を $+Y$ 方向から通過する状態, $\phi = \pi$ は尾を $-Y$ 方向に最大に振った状態, $\phi = -\pi/2$ は尾が体軸中心を $-Y$ 方向から通過する状態に対応する.

続いて, 確率分布 $P(\phi)$ の非一様性の理解を深めるため, エネルギー散逸率 Θ_{dis} を定義する. エネルギーの保存を考えて

$$\Theta_{\text{dis}} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} + \frac{dE_{\text{rot}}}{dt} \quad (144)$$

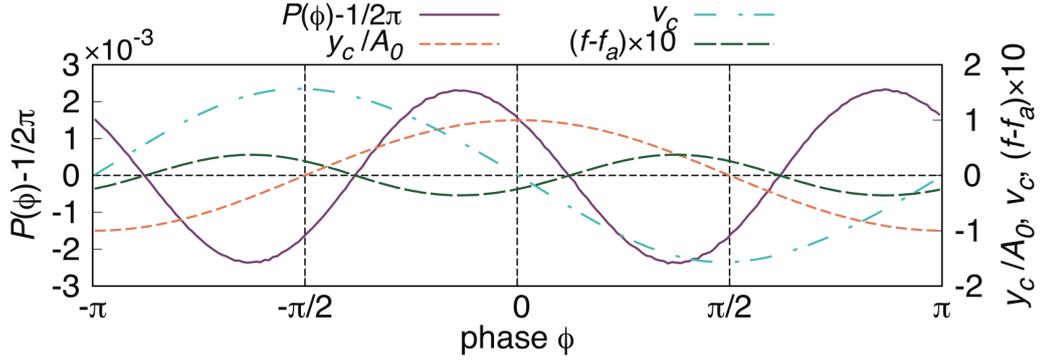


図 86: 尾運動と位相の関係. (左軸) 位相の確率分布 $P(\phi)$. 一様分布 $P(\phi) = 1/2\pi$ からの差分を表示している. (右軸) 位相の関数としての, 尾の横変位 y_c , 横変位速度 v_c , 振動数 f . $N_r = 10^4$ 回のシミュレーションでの平均値をプロットしている. 横変位は基本振幅 A_0 で規格化し, 振動数は f_a からの差分をとっている.

が主張される. ここで, $E_{\text{kin}} = M\delta V^2/2$ は推進の運動エネルギー, $E_{\text{rot}} = I_c\omega^2/2$ は尾の回転のエネルギーである. 無次元化のために式 (144) の両辺を ML_b^2 で割り, $\Theta := \Theta_{\text{dis}}/ML_b^2$ を定義すると

$$\Theta = \delta V \frac{d\delta V}{dt} + \frac{\chi_c^3}{3} \omega \frac{d\omega}{dt} := P_{\text{kin}} + P_{\text{rot}} \quad (145)$$

となる. Θ が大きいほど遊泳に多くのエネルギーを要することを意味する. 図 87 は位相 ϕ の関数としての P_{kin} , P_{rot} , Θ を示し, 図 86 の位相の確率分布 $P(\phi)$ と比較すると, おおむね高エネルギー消費のところで $P(\phi)$ が小さくなるという直感的に妥当な結果を得る.

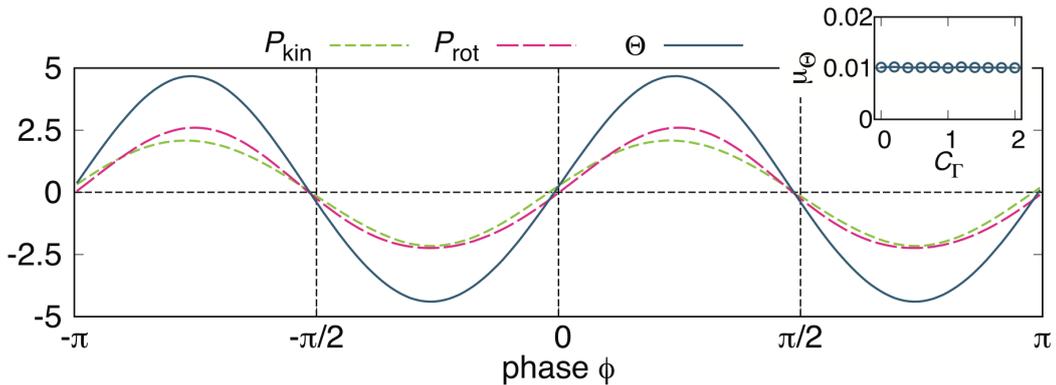


図 87: 尾運動とエネルギー散逸率. 位相の関数としての運動エネルギーの仕事率 P_{kin} , 尾の回転エネルギーの仕事率 P_{rot} , エネルギー散逸率 Θ . $N_r = 10^4$ 回のシミュレーションでの平均値をプロットしている. 破線は P_{kin} , P_{rot} , $\Theta = 0$ に対応する. インセット: Θ の期待値 μ_Θ の C_Γ 依存性.

エネルギー散逸率の期待値を

$$\mu_{\Theta} = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi P(\phi)\Theta(\phi) \quad (146)$$

と定義する. このとき, 図 87 の挿入図に示すように, C_{Γ} の値によらず $\mu_{\Theta} \simeq 0.01 > 0$ という正の値をとる. つまり, 単独遊泳では平均的に見ればエネルギーを少しずつ消費しながら遊泳しているという結果になる.

8.3 ペア遊泳についての結果

本節では, 2 個体によるペア遊泳についての結果を示す. パラメタ $f_a = 2.5$, $D_a = 0.7$, $D_{\phi} = 0.25$ を固定し, 2 個体の横方向の距離 d_{\perp} を加えた可変パラメタセットとして $(\chi_c, C_{\Gamma}, d_{\perp})$ を用いる.

8.3.1 距離と位相差の確率分布

2 匹のキングョでの実験 (3.3.2 節) と同様に, 推進方向の距離 d_{\parallel} と尾運動の位相差 ψ の確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ をはじめに調べる. ここで, 距離は $d_{\parallel} = |X_1 - X_2|$ であり, 位相差は

$$\psi = \begin{cases} \phi_1 - \phi_2 & [X_1 < X_2], \\ \phi_2 - \phi_1 & [X_2 < X_1] \end{cases} \quad (147)$$

と, 先導個体の位相から後続個体の位相を引いた差として定義される (各個体は X 軸の負の方向に推進するので, 重心位置の X 成分が小さい方が先導個体となることに注意). このとき, 特定の d_{\parallel} に対する ψ の確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ は次式で定義される.

$$P(\psi; d_{\parallel}) = \frac{\sum_{n=1}^{N_r} \int_{t_{\max} - t_H + \delta t_{\text{cut}}}^{t_{\max} - \delta t_{\text{cut}}} dt S(d_{\parallel} - d_{\parallel, n}(t)) \delta(\psi - \psi_n(t))}{\sum_{n=1}^{N_r} \int_{t_{\max} - t_H + \delta t_{\text{cut}}}^{t_{\max} - \delta t_{\text{cut}}} dt \delta(d_{\parallel} - d_{\parallel, n}(t))}. \quad (148)$$

ただし, $S(d)$ は $d = 0$ で $S(d = 0) = 1$, $d \neq 0$ で $S(d) = 0$ となるような関数である ($N_r = 10^4$ とする). 各 d_{\parallel} ごとに

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\psi P(\psi; d_{\parallel}) = 1 \quad (149)$$

となるよう規格化している.

まず, $\chi_c = 0.375$, $d_{\perp} = 0.2$ において C_{Γ} を変更することで, 確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ の渦場依存性についてみる. 図 88 に示すように, 循環の強度 C_{Γ} がゼロの場合は確率分布はほとんど一様分布となり, ψ と d_{\parallel} の間の相関関係は見えてこない. C_{Γ} を上昇させると, 非一様になる. 特に, 推進方向の距離が $d_{\parallel} \lesssim 1$ の領域で非一様性が顕著で, これはキングョについての実験事実 [75] とも一致する.

この非一様性が逆カルマン渦を介した尾運動の同期からくるとすると, 確率分布のピークは以下の理論線の上にあると考えられる (図 88 のオレンジの実線).

$$\psi = \frac{2\pi f_a}{U} d_{\parallel} + \psi_0, \quad \psi_0 = -\frac{\pi f_a \chi_c}{U}. \quad (150)$$

これは, 式 (23) と形式的には同じで, d_{\parallel}/U が先導個体の作る渦場が後続個体の尾に到達するまでにかかる時間, $2\pi f_a d_{\parallel}/U$ が逆カルマン渦が到達するまでに進んだ先導個体の位

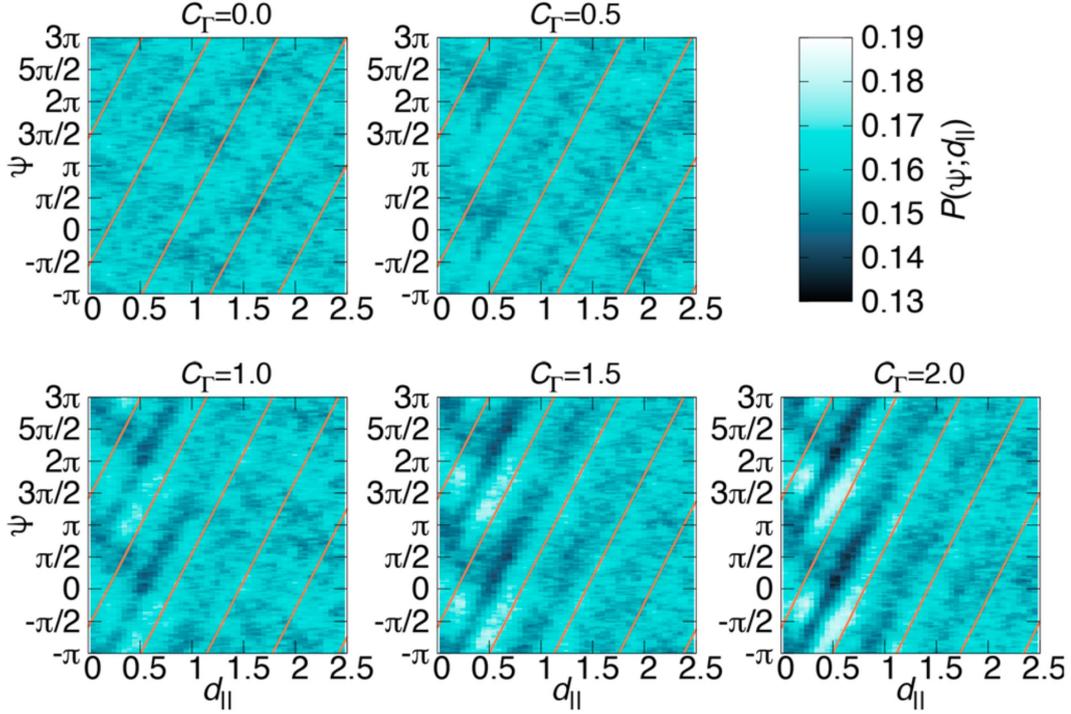


図 88: $P(\psi; d_{\parallel})$ の C_{Γ} 依存性. $\psi \in [-\pi, \pi]$ での $P(\psi; d_{\parallel})$ を $\psi \in [\pi, 3\pi]$ の領域にも周期的に拡張して表示している. オレンジの実線は理論線 (式 (150)) とこれに $2n\pi$ (n は整数) を加えたものを表す.

相を意味する. 本モデルでは, 先導個体の尾の先端から作られた渦場が, 後続個体の尾の中心で最も強く影響を与える. よって, 距離 $d_{\parallel} = \chi_c/2$ において同期が最も強くなると考えられ, この距離で $\psi = 0$ となることを考えれば式 (150) の ψ_0 を得る.

また, C_{Γ} の値によって背景流れ U が変わるので ψ_0 は C_{Γ} に若干依存するが, 現在の $\chi_c = 0.375$ の場合, $\psi_0 \simeq -0.6\pi$ 程度となる (キンギョの実験では -0.2π , 魚型ロボットの試験では 0.3π である [75]). 従って, 本モデルとキンギョの実験での ψ_0 の差異は 0.4π 程度であるが, キンギョと魚型ロボットの間でも ψ_0 が 0.5π 程度異なることを考えると, ψ_0 の値はヒレの形状や柔軟性, うねり運動, 及び乱流等のより複雑な流体場の詳細を加えなければ再現できないと考えられる. あるいは, キンギョなど実際の魚の場合は, 尾の付け根よりも尾の端側の方が柔らかく, 渦の影響は尾の端側で受けやすいことから, 尾の中心点で渦を受ける本モデルよりも ψ_0 がゼロに近くなる可能性もある.

8.3.2 エネルギー散逸率の距離依存性

続いて, 式 (145) のエネルギー散逸率 Θ の d_{\parallel} , ψ に対する依存性を考える. 個体 1 を追跡してエネルギー散逸率を測定するため, 個体 1 が先導のときと後続のときを合わせた平均値が得られる. 図 89 は, シミュレーション回数 $N_r = 10^4$ における, 各 (d_{\parallel}, ψ) での Θ の平均値をカラーマップとして表示したものである. $C_{\Gamma} > 0$ のとき, 理論線 (式 (150)) と平行に $d_{\parallel} \lesssim 1.0$ 程度の領域で非一様性が生じる. なお, $C_{\Gamma} = 0.0$ の場合や, $C_{\Gamma} = 2.0$ の場合の $d_{\parallel} \gtrsim 1$ の領域にも, 横縞状のパターンが見られるが, これは d_{\parallel} に対する依存性

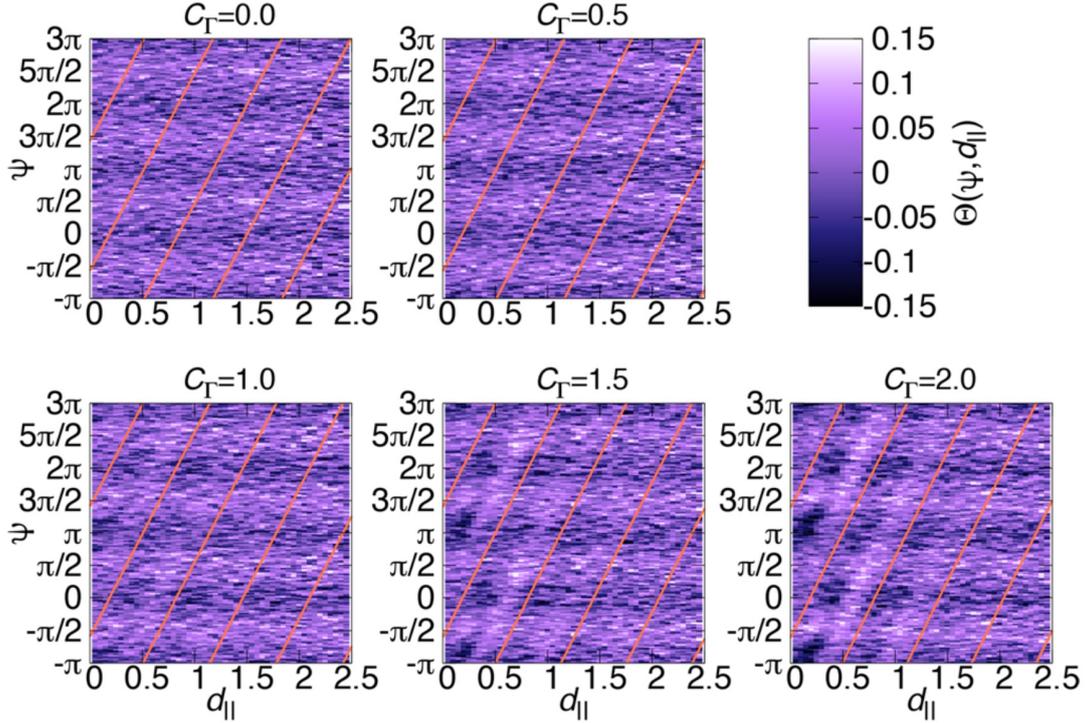


図 89: エネルギー散逸率 Θ の位相差 ψ , 距離 d_{\parallel} に対する依存性. さまざまな渦強度 C_{Γ} について示す.

が見られないことから, 図 87 で見た位相に対する Θ の非一様性に起因すると言える (付録 F を参照).

渦場を介した同期によりエネルギー散逸率が低下しているのかどうか見るために, 各 d_{\parallel} に対する期待値

$$\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi P(\psi; d_{\parallel}) \Theta(\psi, d_{\parallel}) \quad (151)$$

を考える. 図 90 は, $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ の d_{\parallel} , 及び C_{Γ} 依存性を示す. $C_{\Gamma} = 0.0$ のときは, d_{\parallel} 依存性は見られず, 図 87 のインセットに示した単独遊泳でのエネルギー散逸率 $\mu_{\Theta} \simeq 0.01$ をとる. C_{Γ} を上昇させていくと, 確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ とエネルギー散逸率 $\Theta(\psi, d_{\parallel})$ の非一様性がみられた $d_{\parallel} \lesssim 1$ の領域で, 単独遊泳時の値 μ_{Θ} から有意な差が生じる. $d_{\parallel} = 0$ から d_{\parallel} を増加させていくと, 単独遊泳時の値からの差が大きな極小と小さな極大が出現する. つまり, $d_{\parallel} \lesssim 0.5$ 程度にまで 2 個体が近づくことで, 渦場を利用してエネルギー散逸率を抑えることができる. 特に $C_{\Gamma} = 1.5, 2.0$ では, エネルギー散逸率は負の値をとるが, これは 1 サイクルの間に流れ場からエネルギーを得ていることに対応する.

これらの極値の位置の定量的な説明は今後の課題とするが, おそらく以下のように説明できると考えられる. まず, 式 (150) における初期位相 ψ_0 の定式化で説明したように, $d_{\parallel} = \chi_c/2$ において先導個体の作る渦が後続個体の尾の中心付近に生成され, 尾運動の同期によって恩恵を得られることから, $d_{\parallel} = \chi_c/2 = 0.1875$ 付近に極小点ができるであろう. 一方で極大点は, $d_{\parallel} \sim 0.5$ 付近から $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ が上昇するため, 体の受けるニュートン抵抗によるエネルギー散逸率の上昇からくるものと考えられる. 実際, 実験 [75] において

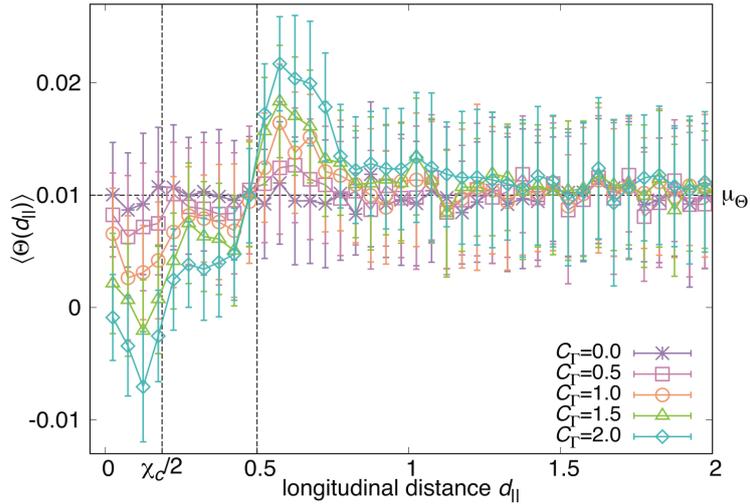


図 90: $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ の d_{\parallel} 及び C_{Γ} 依存性. 各 C_{Γ} において $N_r = 10^4$ 回のシミュレーションを 50 セット実行したときの平均値 (点) と標準偏差 (エラーバー) を表示している.

もロボットのエネルギー効率は $d_{\parallel} \sim 0.8$ BL 付近で負になっており, 本モデルの結果と類似する.

8.3.3 2 個体の自発的接近

次に, 2 匹の個体がどの距離に位置するのか, 距離の確率分布 $P(d_{\parallel})$ を $C_{\Gamma} = 2.0$ において測定した.

図 91 は, 各時間区分 ($t = 0-1, 2-3, 4-5, 20-35, 35-50, 65-80$) ごとに $0 < d_{\parallel} < 2.5 = d_{\parallel, \max}$ の範囲における距離の確率を規格化した分布である. $t = 0$ から数秒で一様分布からの偏差が現れ, $t = 20$ でおおよそ定常分布に達する. 特に, この定常分布は $d_{\parallel} < 0.5$ の範囲にピークを持ち, これは図 90 におけるエネルギー散逸率が減少する領域に位置する. また, $d_{\parallel} > 0.5$ で分布は単調に減少する. 従って, この系では 2 個体が自発的に接近し,

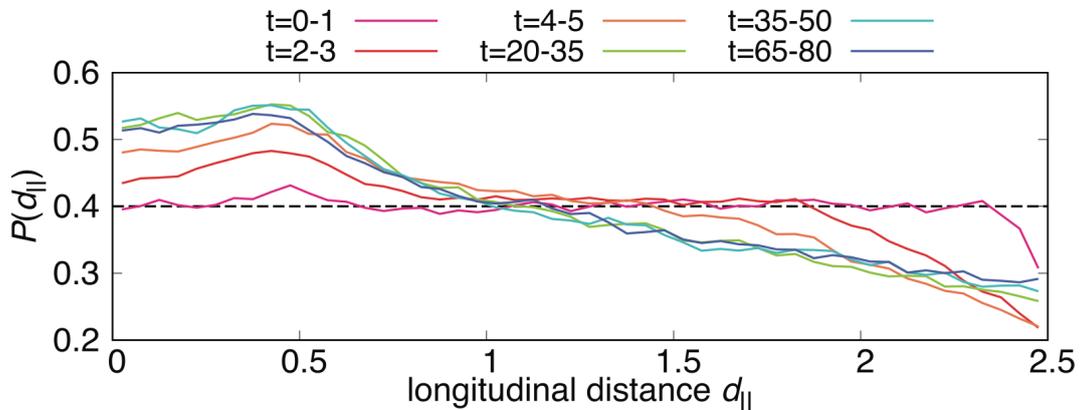


図 91: 各時間区分における距離 d_{\parallel} の確率分布. 時間区分ごとに $0 < d_{\parallel} < 2.5$ の範囲で規格化した. 破線は一様分布の場合を示す.

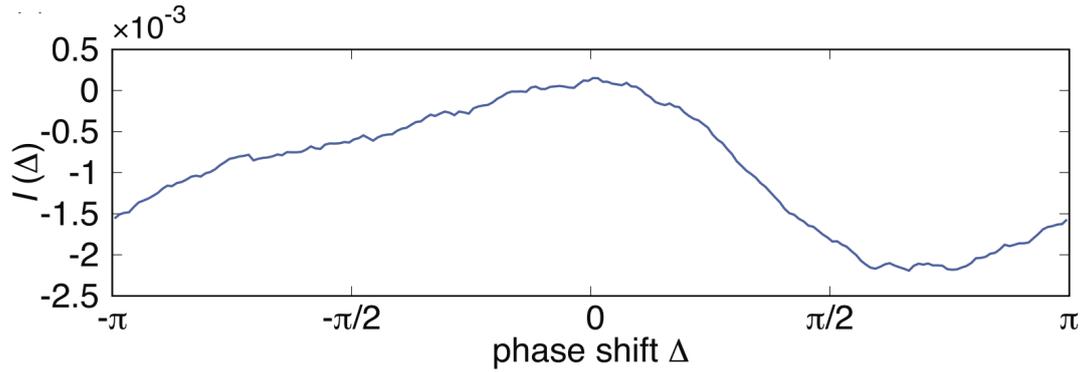


図 92: 確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ とエネルギー散逸率 $\Theta(\psi, d_{\parallel})$ の位相シフト Δ を考慮した重なり積分 $I(\Delta)$.

エネルギー散逸率を減少させる傾向があることが示された。

8.3.4 エネルギー散逸率の最適化問題

ここで、エネルギー散逸率が最適化されているのかを検証する。というのも、図 89 において、エネルギー散逸率が最小となる際の 2 個体の尾の位相差 ψ は理論線からシフトしているように見えるからである。そこで、このシフトを定量化するために、以下の確率分

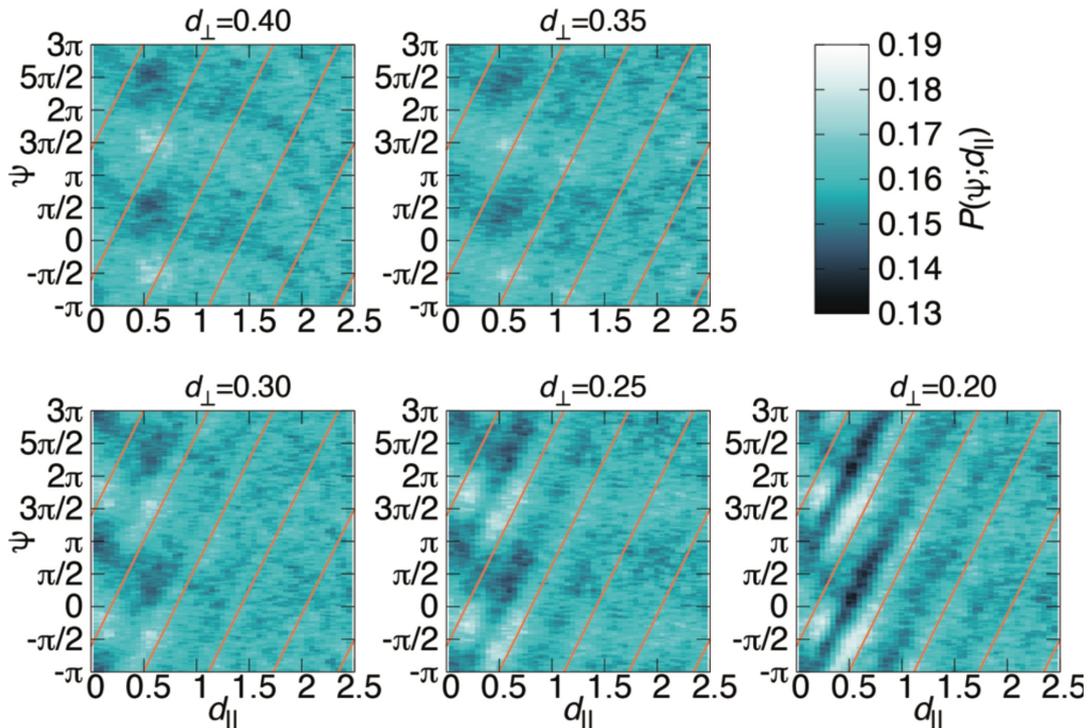


図 93: $P(\psi; d_{\parallel})$ の d_{\perp} 依存性. 表示方法は図 88 に同じである.

布 $P(\psi; d_{\parallel})$ とエネルギー散逸率 $\Theta(\psi, d_{\parallel})$ の重なり積分を考える.

$$I(\Delta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi P(\psi; d_{\parallel}) \Theta(\psi - \Delta, d_{\parallel}). \quad (152)$$

ここで Δ は, 最も実現確率の高い位相差とエネルギー散逸率が最適化される位相差の差分を意味する. 言い換えれば, 仮に $I(\Delta)$ が $\Delta = \Delta_0$ で最小値を取るとすると,

$$\psi_E = \frac{2\pi f_a}{U} d_{\parallel} + \psi_0 - \Delta_0, \quad (153)$$

が最適化されたエネルギー散逸率における位相差の理論線となる. 式 (150) に対して $-\Delta_0$ だけずれたものとなっている.

図 92 は $0 < d_{\parallel} < 0.5$ において平均化した重なり積分 $I(\Delta)$ を示す. ここから $I(\Delta)$ は $\Delta = 0$ 付近で最大値を取り, $\Delta (= \Delta_0) \simeq \pi \times 0.6-0.7$ 付近で最小となることがわかる. すなわち, 2 個体が自発的に接近してエネルギー散逸率は減少するが, 最適化はされていないことが主張される. また, $\psi_{E0} = \psi_0 - \Delta_0 \approx \pi \times 0.7-0.8 \pmod{2\pi}$ と見積もることができる. ロボットの実験で得られている $\psi_{E0} \approx 0.3\pi$ [75] と定量的な差はあるが, エネルギー効率が最適化されないことを簡単なモデルで示すことができたと言える. なお, 流体相互作用する微生物の運動の同期現象のモデルでも, 同期が必ずしもエネルギー効率の最適化をもたらさないことが知られている [190, 191].

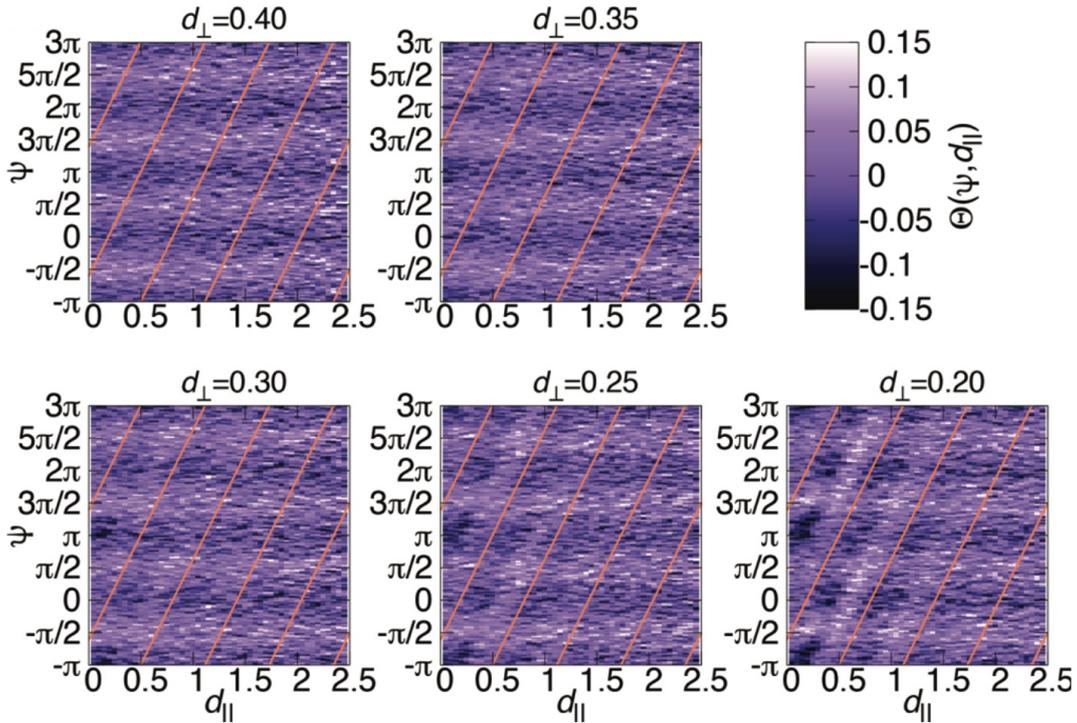


図 94: Θ の d_{\parallel} , ψ に対するカラーマップの d_{\perp} 依存性.

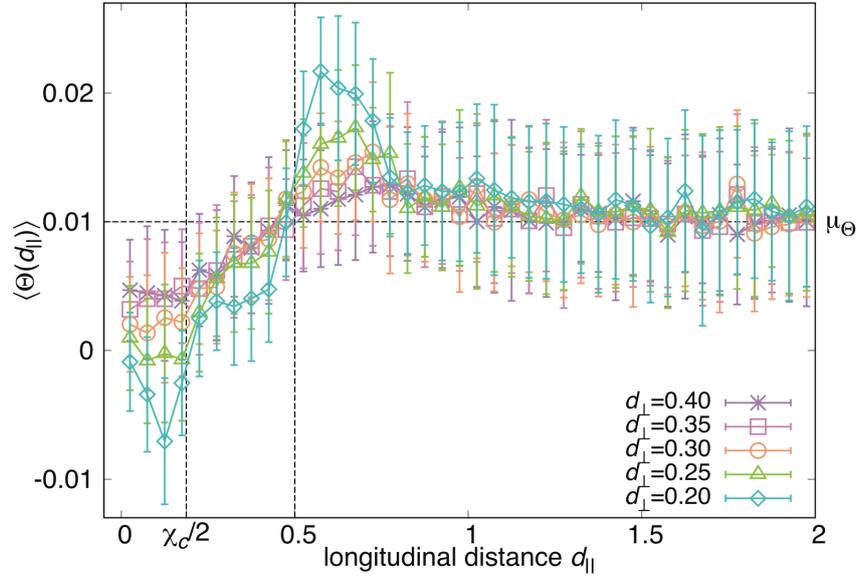


図 95: $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ の d_{\parallel} 及び d_{\perp} 依存性. 表示方法は図 90 と同様.

8.3.5 エネルギー散逸率の d_{\perp} 依存性

最後に、2 個体の横方向の距離 d_{\perp} を変化させた場合、確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ やエネルギー散逸率 $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ がどう変化するかを示す. $C_{\Gamma} = 2.0$, $\chi_c = 0.375$ において d_{\perp} を 0.2 から 0.4 まで変化させる. d_{\perp} が大きくなるほど渦を介した相互作用が小さくなるので、確率分布の非一様性やエネルギー散逸率の μ_{Θ} からのずれは小さくなるはずである. 実際、図 93 に示すように確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ は、 d_{\perp} を増加させていくと、 $d_{\parallel} \lesssim 1$ での非一様性は小さくなり、 $d_{\parallel} \gtrsim 1$ では一様分布に近づく. これはエネルギー散逸率に関しても同様である (図 94). また、図 95 はエネルギー散逸率の期待値 $\langle \Theta(d_{\parallel}) \rangle$ の d_{\perp} 依存性を示したものである. やはり、 d_{\perp} の増加に伴って、極小値、極大値の μ_{Θ} からのずれは小さくなるが、 $d_{\parallel} \lesssim 0.5$ では有意にエネルギー散逸率の減少が見られる.

9 選択的意思決定の先行モデル

第4章で示したモデルを含む多くの自己駆動粒子モデルでは、相互作用の相手を選択する過程までは定式化されておらず、第3.4.3節の選択的意思決定をモデル化したものは少ない。本章では、特定の条件下で選択的意思決定を定式化した少数の先行モデルについて述べる。

9.1 確率分布を利用したモデル

まず、確率分布を用いて直接相手を選択するモデル [192] について述べる。このモデルでは、魚を3本の直交する線分からなる立体物で置き換える (図 96(a))。これらの個体は2次元平面上を運動するため、この系は準2次元系と言える。各個体には頭の向きを基準として方位角 ϕ の1次元座標 (視野) が備わっており、各相手個体の中心位置の方位角が測定される。その方位角を中心として、相互作用相手の大きさに基づき、運動方向の確率分布が視野に設けられる (図 96(b, c))。この確率分布には円環上のガウス分布とも呼ばれる von Mises 分布が用いられている。

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\phi - \phi_0)} \quad (154)$$

ここで、 ϕ は自身の頭の向きを基準として測定した視野上の方位角、 θ_0 は1つの相手個体の中心が位置する方位角であり、

$$I_0(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{\kappa}{2} \right)^n \right\}^2 \quad (155)$$

は κ をパラメタとした0次の第一種変形ベッセル関数である。相手個体が複数匹いた場合 (i で番号付けされる) は、相手個体が自身の視野に作る立体角 A_{f_i} (図 96(b)) により重み付けされ、

$$P(\phi) = \frac{\sum_i A_{f_i} p_i(\phi)}{\sum_i A_{f_i}} \quad (156)$$

が、全体の確率分布となる。これにより、視野中で大きな立体角を占める相手個体の方向に向かって運動することとなる。この視覚情報による確率分布に、自己推進の確率分布とエサの方向に進む確率分布を加味した確率分布の例を図 96(c) に示す (いずれも von Mises 分布を使用)。

2匹の相手個体に対する確率分布の方位角依存性を示したのが模式図 96(d) である。2個体が近い場合は確率分布が重なり合い、前方に1つの高いピークを持つ確率分布となるため魚はその方向に進むが、2個体が離れると、確率分布が2つのピークを持つため、どちらかを選択するような挙動が出現する。このように、このモデルは選択的意思決定を表現したものと言える。ただし、視野上で相手個体同士の像の重なり (視覚遮蔽) は考慮されておらず、遮蔽を無視して式 (156) が適用される。そのため遮蔽の効果を考慮することはできず、遮蔽が無視できる数密度が希薄な少数個体系にのみ適用されており、集団パターンについては対象としていない。

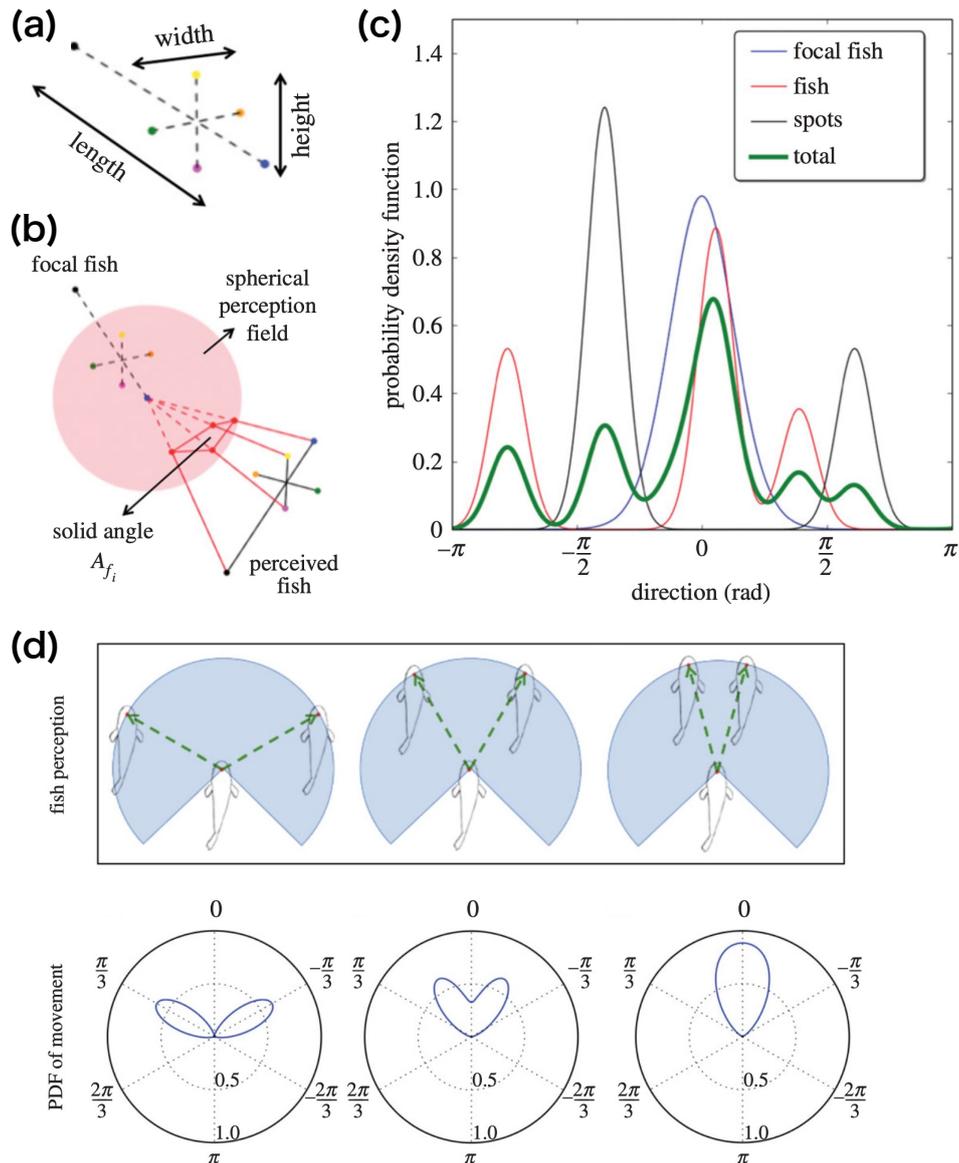


図 96: 視野上の確率分布を用いた選択的意思決定のモデル [192]. (a) 魚の体を 3 本の直交する線分からなる立体物で置き換えた模式図. (b) 相手個体が自身の視野に作る立体角の模式図. (c) 視野上の確率分布の具体例. 相手個体 (fish) が角度 $0, \pi/3, -3\pi/4$ 付近, エサ (spots) が角度 $2\pi/3, -\pi/2$ 付近に存在する場合に対応. focal fish は自己推進の分布に対応. (d) 2 匹の相手個体がいる場合の視野上の合成確率分布の具体例. 確率分布は各方向に向かう確率を中心からの距離としてプロットしている. 図は [192] より許可を得て転載.

9.2 スピンによる相転移を利用したモデル

続いて, スピンによる相転移を利用した選択的意思決定のモデルについて述べる [111, 193, 194]. このモデルでは, 個体の前方に 2, 3 個の標的を置く (図 34 のバーチャルフィッシュを静止した標的に置き換え, ゼブラフィッシュをモデルの個体に置き換えたものに対応する). ここで, 視覚情報を処理するための内部自由度としてスピンの系を設ける. N 個

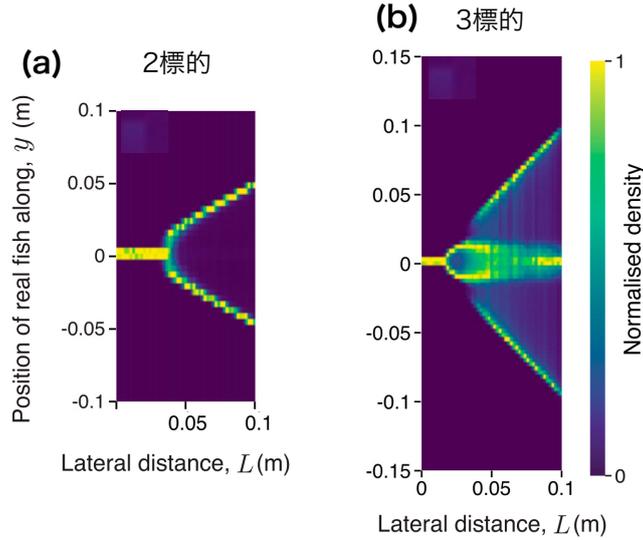


図 97: スピンによる相転移を利用した選択的意思決定のモデル [111]. 図 34 も参照. (a) 標的が 2 個の場合, (b) 標的が 3 個の場合の, 個体の y 軸上の位置の確率分布を, 標的間の距離 L ごとにプロットした図. 図は [111] より許可を得て転載.

の各スピン $\sigma_{n=1, \dots, N} = \{0, 1\}$ には, いずれかの標的の方向を向いた単位ベクトル (ゴールベクトル) \mathbf{p}_n がランダムに割り当てられる. 例えば 2 個の標的であれば, 個体から見て左の標的に向かうベクトル \mathbf{p}^l と右の標的に向かうベクトル \mathbf{p}^r が, ゴールベクトルとして N 個のスピンごとに $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}^l$ または $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}^r$ と割り当てられる. このとき, このスピンのハミルトニアンが

$$H = -\frac{k}{N} \sum_{n \neq m} J_{nm} \sigma_n \sigma_m \quad (157)$$

$$J_{nm} = \cos(\angle(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m)) \quad (158)$$

と定義される. ここで, $\angle(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m)$ はゴールベクトル \mathbf{p}_n と \mathbf{p}_m が成す角度の大きさである. 数値計算としては, 1 時間刻みごとにメトロポリス・ヘイスティングス法を用いて, スピン系のエネルギーを下げ, その結果を元に, 個体は速度

$$\mathbf{V} = \frac{v_0}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_n \mathbf{p}_n \quad (159)$$

で推進する.

従って, スピン n とスピン m に割り当てられたゴールベクトルが同じであれば, それらのスピンの向きが揃い, 強磁性的に振る舞うことでエネルギーが下がり, 逆にゴールベクトルが異なる場合は, \mathbf{p}_n と \mathbf{p}_m の成す角度が小さければ強磁性的に, 成す角度が大きければ反強磁性的に振る舞うことでエネルギーが下がる. つまり, 相転移的観点では, ゴールベクトルが似ているもの同士でスピンの秩序が形成されるが, ゴールベクトルが大きく異なるものとの反強磁性的相互作用によって, どれか 1 つのゴールベクトルに対応するスピンの秩序が勝る. このような過程により, 1 つのゴールベクトルが選択され, 結果としてそのゴールベクトルの方向へ速度 \mathbf{V} で運動し, 標的に接近していく仕組みになっている. た

だし、このモデルではゴールベクトルの実態が不明で、多数の標的 (相手個体) がある場合では各個体の内部自由度も多数となるため計算コストが大きくなることから、集団パターンについては扱われていない。このモデルのシミュレーションにより、図 34 で示した実験を再現する、2 個の標的に対しては二又、3 個の標的に対しては三又に分岐した確率分布が得られている。

10 選択的意思決定を考慮した視覚モデルの構築

この章の結果は本研究に関する著者らの論文 [195] に基づく。(S. Ito and N. Uchida, Selective decision-making and collective behavior of fish by the motion of visual attention, *PNAS Nexus* **3**, pgae264 (2024). doi:10.1093/pnasnexus/pgae264 より許可を得て図表を転載。) 第 9 章で述べたように, 先行モデルは個体数が少なくかつ遮蔽が無視できる場合の選択的意思決定を表すが, 選択的意思決定と集団運動を包括的に再現できるモデルは存在していない. そこで, これを実現するために, 本研究では以下のようなモデルを構築する. 3.4 節で示した視覚相互作用の実験的知見を基に, 近傍の個体からの視覚刺激によって駆動される視線 (注意の方向) を導入し, その動きをモデル化する. このとき, 視線の先にいる相手個体と斥力, 引力, 配向の相互作用を行う. このモデルにより, 先行実験 [111] の確率分布の分岐現象を再現し, 多様な集団パターンを再現することを示す. 加えて, 視覚相互作用の観点から, トポロジカル相互作用 [77] や 3 体力 [76] の原因を解析する.

10.1 モデルの定式化

まず初めに, 本モデルの構成の概要について述べる. 自己駆動する個体が視野中の相手個体から視覚刺激を受け, 各個体の視蓋のレチノトピックマップを模した内部空間に信号が生成される. 信号の強さは内部空間上の相手個体の鉛直角直径や相対速度に依存し, 視線 (注意の方向) は強い信号の方を向くようにモデル化される. 各個体は視線の先の相手個体の視覚情報を読み取り, 自身の運動に反映する.

モデルの詳細について述べる. 自己駆動個体は単眼が備わった平板で表現され (図 98(a)), N 個の個体は境界の無い平面上を運動する (図 98(b)). 個体番号を $i = 1, 2, \dots, N$ とし, 目の位置を $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$, 速度を $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt = v_i \mathbf{e}_i$ と定義する. ここで $v_i \geq 0$ は速さ, $\mathbf{e}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ は進行方向の単位ベクトル, θ_i はその角度である.

10.1.1 視線の時間発展方程式

本モデルの新しい特徴として視線を導入し, その角度を ϕ_i とする (図 98(c)). ϕ_i の時間発展を以下のようにモデル化する. 図 98(d) に示すように, 視野は神経節細胞 (3.4.1 節参照) に対応するビンに分割される. ビンの個数 N_b は神経節細胞の数に対応し, 細胞の密度と網膜の面積から見積もられる. μ 番目 ($\mu = 1, 2, \dots, N_b$) のビンの角度を ϕ_μ と表記する. また, 個体 i の μ 番目のビンで測定された相手個体の鉛直角直径を $\delta_{i,\mu}^\perp$ (図 98(b) も参照), 相対速度の大きさを $u_{i,\mu}$ と書く.

ここで, 視蓋のレチノトピックマップ (3.4.1 節参照) を模した, 角度座標 $\phi \in [-\pi, \pi]$ を軸に持つ 1 次元の perception field を定義する. 各ビンからの信号は以下の信号強度分布で表現される (図 98(e) 参照).

$$\gamma_{i,\mu}(\phi) = -U(\delta_{i,\mu}^\perp, u_{i,\mu}; \beta) A(\delta_{i,\mu}^\perp) G(\phi, \phi_\mu; \kappa) \quad (160)$$

ここで $G(\phi, \phi_\mu; \kappa)$ は受容野を反映した信号強度分布であり、 $\phi = \phi_\mu$ にピークを持つ。また、 $A(\delta_{i,\mu}^\perp)$ は鉛直角直径に対する依存性、 $U(\delta_{i,\mu}^\perp, u_{i,\mu}; \beta)$ は相対速度依存性を表す。各ビン (神経節細胞) からの信号は perception field で重ね合わされる (図 98(e))。

$$\Gamma_i(\phi) = \sum_{\mu=1}^{N_b} D(\phi_\mu; \chi) \gamma_{i,\mu}(\phi) \quad (161)$$

ここで $D(\phi_\mu; \chi)$ は網膜上の神経節細胞の密度の非一様性 (3.4.1 節を参照) を表現する関数である。これらの関数の具体的な形は 10.1.2 節で導入する。このとき、視線の角度 ϕ_i は以下の時間発展方程式に従う。

$$\tau_\phi \frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{d\Gamma_i(\phi_i)}{d\phi_i} \quad (162)$$

τ_ϕ は ϕ_i の変化する特徴的なタイムスケールを表す。 $-d\Gamma_i(\phi_i)/d\phi_i$ は視線の移動を引き起こす駆動力とみなせ (図 98(e))、 ϕ_i が perception field 上のポテンシャルとしての合成信号 $\Gamma_i(\phi)$ の極小位置に移動することを意味する。

10.1.2 信号の関数

式 (160), (161) 中の関数の意味について述べる。信号強度は、ビンで測定された鉛直角直径と相対速度の大きさの関数となっているが、これは、ゼブラフィッシュが相手個体と

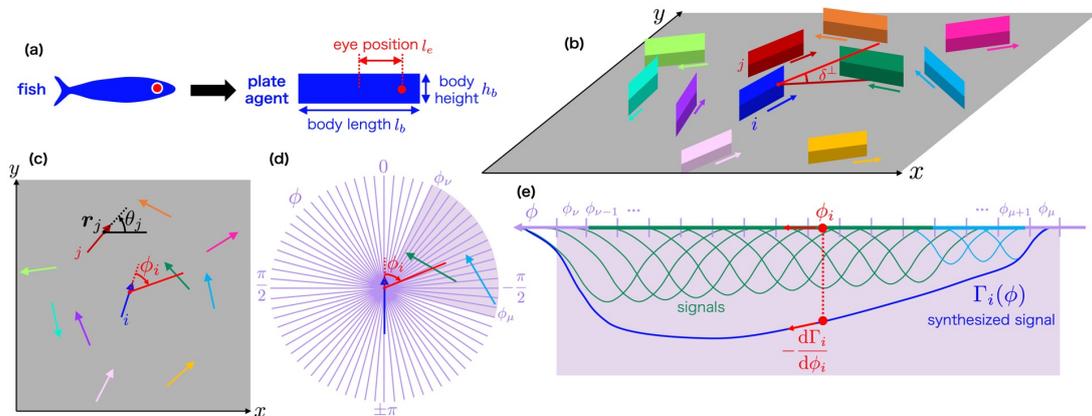


図 98: 本モデルの模式図。(a) 個体は長さ l_b 、高さ h_b の平板で表される。目は体の中心から l_e だけ離れた前方に位置する。(b) 個体は x - y 平面上を運動する。各個体の矢印は進行方向を示し、 δ^\perp は青の個体 (i) から見たときの緑の個体の鉛直角直径を示す。ただし、鉛直角直径は緑の個体の体の各位置で変化する。(c) 図 (b) を上から見た様子。角度 ϕ_i は個体 i の進行方向から測定した視線の角度である。 $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$ と θ_j はそれぞれ、個体 j の目の位置と進行方向の角度を表す。 ϕ_i, θ_j は反時計回りを正の向きとし、 $[-\pi, \pi]$ の範囲の値をとる。(d) 個体 i の視野をビンに分割した様子。各ビンの中心の角度は ϕ_μ と表される。緑と水色の相手個体が検知されているビン $\phi_\mu \leq \phi \leq \phi_\nu$ に背景色を付けている。(e) 図 (d) における $[\phi_\mu, \phi_\nu]$ 内の像からの信号。 ϕ 軸上の緑と水色の線は各個体が占めるビン、緑と水色の曲線は各ビンの信号 $\gamma_{i,\lambda}(\phi)$ を表す。それらを重ね合わせたものが視蓋での合成信号 $\Gamma_i(\phi)$ となる。赤の矢印は合成信号の微分 $-d\Gamma_i/d\phi_i$ である。

の距離測定において、水平角直径よりも鉛直角直径をよく用いること、及び相対速度を感知するアマクリン細胞の存在やゴールデンシャイナーを用いた実験に基づいている。

信号強度は4つの関数 G, D, A, U から成る。 G, D は目の性質からくるものであり、視覚情報 $(\delta_{i,\mu}^\perp, u_{i,\mu})$ には依存せず、 A, U は視覚情報に依存する信号の強度を表現しており、それぞれ以下のような意味を持つ。

- G はビンの周りの信号の角度分布を与える関数である。 perception field 上の角度 ϕ の関数であり、参考文献 [192] にならって von Mises 分布の形とする。 ϕ_μ に位置するビンが perception field 上の位置 ϕ に作る信号は

$$G(\phi, \phi_\mu; \kappa) = \exp[\kappa\{\cos(\phi - \phi_\mu) - 1\}] \quad (163)$$

となる。 $\phi = \phi_\mu$ で最大値 $G = 1$ となるよう規格化されており、角度差 $|\phi - \phi_\mu|$ と尖度パラメタ $\kappa (> 0)$ に依存して減衰する。 κ は神経節細胞の受容野の幅に対応し、 κ が大きいほど信号の幅が狭くなる。これは神経節細胞に入力される情報の空間幅が狭くなるほど視覚情報の空間解像度が上がることを意味する。

- D は神経節細胞の密度の非一様性を表す関数である。網膜は左右対称なので、 ϕ_μ の偶関数として以下の形で表す。

$$D(\phi_\mu; \chi) = \frac{1 + \chi \cos \phi_\mu}{1 + \chi} \quad (164)$$

ここで、 $\chi \in [0, 1]$ は非一様性の強さを表す。関数 D は前方中央で $D(0; \chi) = 1$ となるよう規格化され、最小値 $D(\pm\pi; \chi) = (1 - \chi)/(1 + \chi) < 1$ をとる。従って、後方にいる相手個体からの信号が弱くなる。これは、神経節細胞の密度の非一様性により、相対的に前方がより見えやすく、後方は感知しにくくなることを反映する。

- A は信号の強度の鉛直角直径に対する依存性を表す関数であり、次式で定義する：

$$A(\delta_{i,\mu}^\perp) = \hat{A} \frac{r_0}{r_0 + r_{i,\mu}} \quad (165)$$

ここで、

$$r_{i,\mu} = \frac{h_b}{2 \tan(\delta_{i,\mu}^\perp/2)} \quad (166)$$

は相手個体の鉛直角直径 $\delta_{i,\mu}^\perp$ から算出される相手との距離を表す。また、 r_0 は視力の限界により相手個体を判別できなくなる限界距離を表す。これは、判別可能な最小の相手個体の水平角直径 (水平方向の角度) を δ_0^\parallel とすると、 $r_0 = l_b / \left[2 \tan(\delta_0^\parallel/2) \right]$ と決められる。従って、ゼロ距離 $r_{i,\mu} = 0$ (あるいは $\delta_{i,\mu}^\perp = \pi$) において、最大値 \hat{A} を取り、相手個体が遠くなるほど刺激が小さくなり、信号は弱くなる。これは、より近くにいる個体に反応しやすいという実験結果 [105] を反映したものである (3.4.1 節参照)。特に、限界距離より十分遠い場合 ($r_{i,\mu} \gg r_0$)、振幅は $A \propto 1/r_{i,\mu} \propto \delta_{i,\mu}^\perp$ となるため、信号の強度は鉛直角直径の大きさとともに小さくなるという直感的に妥当なものである。

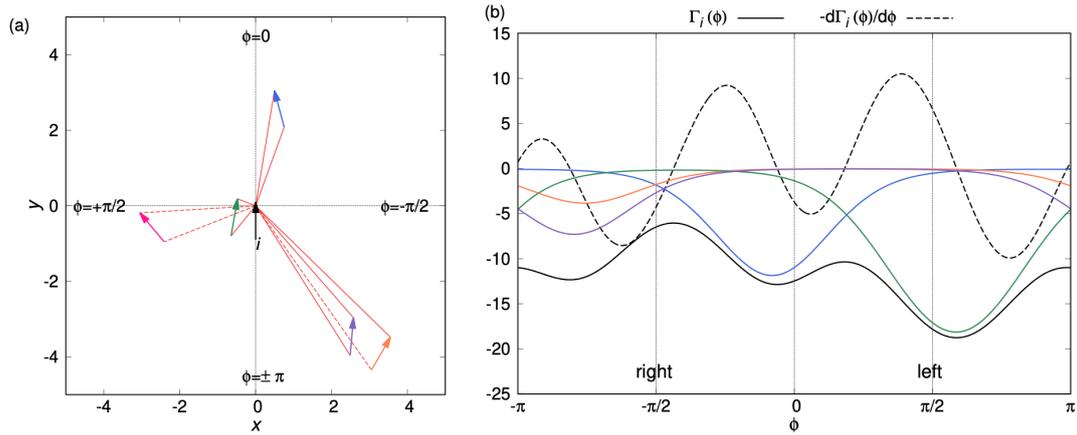


図 99: 合成信号の具体例 ($\kappa = 2.5$, $\chi = 0.3$, $\beta = 4.0$). (a) 個体の配置サンプル. 簡単のため, 個体の速さは定常速さ v_0 に設定している. 中心の黒い個体 i の目から各相手個体の頭部尾部の端に赤の線をプロットしている. 赤の破線は像同士の視覚遮蔽により, 個体 i からは見えない部分を表す. 全身が見える青の個体, ピンクの個体を完全に遮蔽する緑の個体, 部分的に遮蔽が起こるオレンジと紫の個体が描かれる. (b)(a) の配置に対応する合成信号 $\Gamma_i(\phi)$ (黒実線) とその微分 $-d\Gamma_i/d\phi$ (黒破線). それぞれの個体の色の実線で, それらの個体からくる信号 $\tilde{\Gamma}_i(\phi)$ をプロットしている.

- 相手個体の相対速度に対する依存性は U が担う.

$$U(\delta_{i,\mu}^\perp, u_{i,\mu}; \beta) = (1 - e^{-r_{i,\mu}/r_a}) + e^{-r_{i,\mu}/r_a} e^{\beta\{(u_{i,\mu}/v_0)-1\}} \quad (167)$$

これは相対速度の大きさ $u_{i,\mu}$ の増加関数であり, パラメタ $\beta (\geq 0)$ で制御される. 相対速度が大きい相手個体に反応しやすいという実験 [105] を反映している (3.4.1 節参照). $\beta = 0$ の場合, $U = 1$ の定数となり速度依存性は消失する. また, r_a は相手個体の体表の模様などがはっきりと見える, それによって, 相手の速さが検知できる距離を表す. そのため, 相手個体が r_a より十分離れている場合 ($r_{i,\mu} \gg r_a$) では, $U \simeq 1$ となり, 速さが検知されなくなることに対応する. 一方で, 相手が十分近い場合は, $U \simeq e^{\beta\{(u_{i,\mu}/v_0)-1\}}$ に上昇し, β が大きいほど振幅への速さの影響が大きくなる.

図 99 に合成信号 $\Gamma_i(\phi)$ の計算例を示す. 合成信号はいくつかの極小点を持ち, 視線の角度 ϕ_i が時間発展方程式 (162) に従って, いずれかの極小点に引き付けられる. 図 99(b) の青, 緑, 紫, オレンジの実線は 1 相手個体からもたらされる合成信号であり, その個体が占めるビンについての和

$$\tilde{\Gamma}_i(\phi) = \sum_{\mu \in a \text{ neighbor}} D(\phi_\mu; \chi) \gamma_{i,\mu}(\phi). \quad (168)$$

となる.

10.1.3 力の発生と運動方程式

続いて、視線の方向を定めた個体 i が、どのように運動の力を決定するかを示す。本モデルでは、個体の推進の速さと運動方向の角度 (v_i, θ_i) を運動の変数に定める [136, 196]。実験においても速さの変化と角度の変化を測定することが多く、実験との比較がしやすいという利点がある [76, 77]。

本節では運動方程式の構成と意味を述べ、次節で力の表式の詳細を示す。 v_i の時間発展方程式は

$$\frac{dv_i}{dt} = C(v_0^2 - v_i^2) + \langle F(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp) \rangle_\mu + \eta_{v,i}, \quad (169)$$

θ_i の方程式は

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \langle \Omega(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) \rangle_\mu + \eta_{\theta,i}, \quad (170)$$

となる。ここで、個体の質量は 1 に規格化され、 v_0 は定常遊泳の速さ、 C は抵抗係数に比例する定数である。自己駆動力 $C(v_0^2 - v_i^2)$ はニュートン抵抗 $-Cv_i^2$ と推進力 Cv_0^2 からなる [40]。また、 $\eta_{v,i}dt = \sqrt{2D_v}dw_{v,i}$ と $\eta_{\theta,i}dt = \sqrt{2D_\theta}dw_{\theta,i}$ はホワイトガウスノイズ項であり、 $dw_{v,i}$ と $dw_{\theta,i}$ は標準ウィーナー過程に対応する。

視覚の方向 ϕ_i の効果は相互作用項の運動方向の力 $\langle F(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp) \rangle_\mu$ と角速度 $\langle \Omega(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) \rangle_\mu$ に含まれる。 F と Ω は斥力、引力、配向の力などを含む関数であり、具体的な関数形は次節で述べる。ここで $\langle \dots \rangle_\mu$ は視線の角度 ϕ_i を中心とした角度幅 δ_0^\parallel の区間での平均である。すなわち、視線の先の情報は限界分解能を超えて判別することはできないため、その限界分解能内の“ぼやけた”情報の処理を角度幅 δ_0^\parallel の範囲の平均化で表現している。具体的に数式で表すと、視野中のある量 $Q(q_{i,\mu})$ に対して、

$$\langle Q(q_{i,\mu}) \rangle_\mu = \sum_{\mu \in \mathcal{R}_i} Q(q_{i,\mu}) / |\mathcal{R}_i| \quad (171)$$

として平均化が行われる。 \mathcal{R}_i は ϕ_i を中心とした区間 $[\phi_i - \delta_0^\parallel/2, \phi_i + \delta_0^\parallel/2]$ に含まれるビンの集合に対応する。 $|\mathcal{R}_i|$ はこの区間に含まれるビンの数であり、区間幅 δ_0^\parallel を各ビンの幅 δ_b^\parallel で割ったもので与えられる。

10.1.4 力の関数

この小節では力の表式について述べる。まず、式 (169) 右辺の $C(v_0^2 - v_i^2)$ は、魚が高レイノルズ数で遊泳することから、上述の通り、ニュートン抵抗を意識して定式化した。ただし、遊泳速度が定常速度に近い ($v_i \simeq v_0$) 場合は、 $C(v_0^2 - v_i^2) \simeq 2Cv_0(v_0 - v_i) \propto v_0 - v_i$ となるため、第 5 章のモデルの自己駆動項と同様の形となる。

運動方向の力 $F(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp)$ は、相手個体の方位角 ϕ_μ と鉛直角直径 $\delta_{i,\mu}^\perp$ に依存する。実験 [76, 77] より、斥力は近距離 ($\delta_{i,\mu}^\perp$ が小さい)、引力は遠距離 ($\delta_{i,\mu}^\perp$ が大きい) で働き、共に前方、後方に相手個体がいるとき ($\phi_\mu \approx 0, \pm\pi$) に強くなることがわかっている。従って、推進力を以下のように構成する。

$$F(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp) = f(r_{i,\mu}) \cos(\phi_\mu), \quad (172)$$

$$f(r) = \begin{cases} -f_r \frac{r_e - r}{r_e} & [0 < r < r_e], \\ f_a \frac{r - r_e}{r_a - r_e} & [r_e < r < r_a], \\ f_a \frac{r_a}{r} & [r_a < r] \end{cases} \quad (173)$$

ここで、距離 $r_{i,\mu}$ は鉛直角直径 $\delta_{i,\mu}^\perp$ と $r_{i,\mu} = 2 \tan\left(\frac{h_b}{2\delta_{i,\mu}^\perp}\right)$ の関係にあり、 r_e は力の平衡距離、 r_a は引力が最大値 f_a をとるときの相手個体との距離である。また、ゼロ距離では斥力が最大値 f_r をとる。方位角依存性 $\cos(\phi_\mu)$ は先行モデル [136] の表式に一致する。距離依存性の関数 $f(r)$ は、 $r < r_a$ の距離においてはおよそ線形の関数で近似できること、及び、 $r > r_a$ の遠方では $1/r$ に比例するという実験結果 [78] にもとづいて定式化した。

角速度 $\Omega(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu})$ は ϕ_μ と $\delta_{i,\mu}^\perp$ に加え、自身と相手個体と進行方向の角度差 $\psi_{i,\mu}$ に依存する。 Ω には斥力、引力に加え、配向相互作用が含まれる [78]。斥力と引力は、左右に相手個体がいるとき ($\phi_\mu \approx \pm\pi/2$) に強くなり [76, 77]、相手個体が体表模様が見える範囲で自身と反対方向に運動している場合 ($\psi_{i,\mu} \approx \pm\pi$) も強くなる [78]。一方で、配向相互作用は前方に相手個体がいるとき ($\phi_\mu \approx 0$) 強くなり、相手個体が中間の距離で自身と垂直に運動している場合 ($\psi_{i,\mu} \approx \pm\pi/2$) も強くなる [78]。従って、角速度は斥力、引力項 $\Omega_{r,a}$ と配向相互作用項 Ω_o に分けて以下のように構成する。

$$\Omega(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) = \Omega_{r,a}(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) + \Omega_o(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}). \quad (174)$$

ここで、斥力、引力項は

$$\Omega_{r,a}(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) = \omega(r_{i,\mu}) \sin \phi_\mu \left(1 - e^{-r_{i,\mu}/r_a} \frac{1 + \cos \psi_{i,\mu}}{2} \right), \quad (175)$$

$$\omega(r) = \begin{cases} -\omega_r \frac{\rho_e - r}{\rho_e} & [0 < r < \rho_e], \\ \omega_a \frac{r - \rho_e}{r_a - \rho_e} & [\rho_e < r < r_a], \\ \omega_a \frac{r_a}{r} & [r_a < r] \end{cases} \quad (176)$$

である。 $\omega(r)$ は関数 $f(r)$ と似た形の距離依存性を表す関数である。ただし、 ρ_e は左右の距離の平衡距離であり、これは魚の体が細長いために前後方向の平衡距離 r_e より小さくなる。方位角依存性 $\sin \phi_\mu$ は、先行モデル [136] でも導入されており、相手個体が左右に位置する場合に角速度が大きくなることを表す。進行方向の角度差 $\psi_{i,\mu}$ に対する依存性は

$$1 - e^{-r_{i,\mu}/r_a} \frac{1 + \cos \psi_{i,\mu}}{2} \quad (177)$$

で表される。これは、遠方 ($r_{i,\mu} \gg r_a$) では相手の向きが判別できないため、定数 1 に近づき、近くでは $(1 - \cos \psi_{i,\mu})/2$ となるように構成された関数である。実験 [78] では、 $\psi_{i,\mu}$ 依存性は $\cos \psi_{i,\mu}$ と $\cos(2\psi_{i,\mu})$ でフーリエ展開されているが、本モデルでは基本波成分のみを残す。

一方で配向相互作用の項は強度パラメタを ω_o として

$$\Omega_o(\phi_\mu, \delta_{i,\mu}^\perp, \psi_{i,\mu}) = \omega_o \exp\left\{-\frac{(r_{i,\mu} - r_o)^2}{2l_o^2}\right\} \frac{1 + \cos \phi_\mu}{2} \sin \psi_{i,\mu} \quad (178)$$

と表される。距離依存性 $\exp\{-(r_{i,\mu} - r_o)^2/2l_o^2\}$ をガウス関数とするが、これは実験 [78] によるフィッティングとよく一致する。この関数が最大となる距離 r_o は平衡距離と引力の最大距離 (体表の模様が見え始める距離) との中間の距離 $\rho_e < r_o < r_a$ であり、 l_o は特徴的な長さである。また、 ϕ_μ と $\psi_{i,\mu}$ 依存性については、 $\Omega_{r,a}$ と同様に、実験によるフィッティングの基本波成分のみを用いる。

10.1.5 パラメタ

本モデルで用いるパラメタとその値について述べる．表 5 によるパラメタのまとめも参照されたい．ただし，シミュレーションでは体長 $l_b = 1$ BL，タイムスケール $\tau_0 = 1$ sec，個体の質量 m で規格化したものを用いる．

- 複数の魚種の平均値 [174] から個体は体高 $h_b \sim 0.3$ [BL] を持つ．また，目の位置は中心から $l_e = 0.4$ BL，すなわち尾端から 0.9 BL に位置する．先行モデル [192] では，簡単のため頭の先端に位置すると仮定されていたが，実際には目の位置は少し後方であるため，この値を採用した．
- 視野のビンの数 (神経節細胞の数) は以下のように見積もる．ゼブラフィッシュやゴールデンシャイナーの神経節細胞の密度は $\mathcal{O}(10^4)$ cells/mm² である [95]．また，網膜の直径は $\mathcal{O}(1)$ mm であるため [95]，網膜中の神経節細胞の数は $\mathcal{O}(10^4)$ – $\mathcal{O}(10^5)$ と見積もられる．本モデルで用いる水平方向のビンの数はこの神経節細胞の数の平方根で近似できる．従って，ビンの数を $N_b = 720$ と定めると，ビンの幅は $\delta_b^{\parallel} = 2\pi/N_b = 0.5^\circ$ となる．あるいは，各ピンは鉛直方向に $\sqrt{N_b}$ 個の神経節細胞が備わっており，これらが相手個体の鉛直角直径を検知していると理由づけることができる．
- 水平方向の限界分解能角度を $\delta_0^{\parallel} = 2^\circ$ と定める．これは相手個体が見える限界の距離に換算すると $r_0 = l_b / \left[2 \tan(\delta_0^{\parallel}/2) \right] \simeq 28.6$ BL となる．実際，ゴールデンシャイナーは 16-39 BL の距離まで相手を検知することが可能である [95]．ちなみに，この場合，限界分解能角度中のビンの数は $|\mathcal{R}_i| = 5$ となる．また，相手個体の体表の様子がはっきり検知できる距離を $r_a = 3$ BL と定める．これはゼブラフィッシュでは相手の縞模様を 2-5 BL の距離で検知し，ゴールデンシャイナーでは相手の鱗のパターンを 1-3 BL の距離で検知できることに基づく [95]．
- 続いて，視覚刺激の信号に関わるパラメタについて述べる．信号の鋭さを表す κ と相対速度依存性を担う β はコントロールパラメタとするが，シミュレーション結果と実験との比較から，多くの場合 $\kappa = 2.5$ ， $\beta = 4.0$ を用いる． χ に関しては， $\phi_\mu = \pm\pi$ における関数 D の値 $(1-\chi)/(1+\chi)$ が網膜の前後の密度比を表すことから，これをゼブラフィッシュとゴールデンシャイナーにおける測定値 $1/2$ [95] と比較する．従って， $\chi \sim 1/3$ と見積もることができるが，コントロールパラメタとしても用いる．また，視線の運動のタイムスケール τ_ϕ は，魚の遊泳のタイムスケール τ_0 と概ね同じであると仮定して， $\tau_\phi = \tau_0 = 1$ s を用いる．
- 次に定常遊泳に関するパラメタ値を述べる．定常遊泳の速さは ~ 1.5 – 3.0 BL/s [38, 51, 139] のため，本モデルでは $v_0 = 2$ BL/s を採用した． τ_0 は本研究の先行モデル [137] と同じく $\tau_0 = 1$ s とする．自己推進力は定常速度付近で $C(v_0^2 - v_i^2) \simeq$

$2Cv_0(v_0 - v_i)$ と近似できるため、遊泳のタイムスケールは $1/(2Cv_0)$ と見積もられる。これを τ_0 と比較すると、 $C = 1/(2v_0\tau_0) = 0.25 \text{ BL}^{-1}$ を得る。あるいは、 C は抵抗係数から直接見積もることもできる。 $\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ を水の密度、 $C_D \gtrsim 0.01$ をレイノルズ数 $\sim 10^5$ における抵抗係数 [185] として、 $C = \rho_w C_D S/m$ の関係にある。ここで、 $S \lesssim l_b h_b$ は魚の側面積、 $m = \rho' l_b^2 h_b$ ($\rho' \sim 41 \text{ kg m}^{-3}$) は質量 [174] である。従って、 $C \sim \rho_w C_D / (\rho' l_b) \sim \mathcal{O}(0.1) \text{ BL}^{-1}$ を得るため、これはタイムスケールから見積もった係数 C と同じオーダーとなる。また、ノイズの拡散係数 D_v と D_θ はコントロールパラメタとするが、よく用いる $D_\theta = 0.01$ では単位時間あたり $\sqrt{2D_\theta} \sim 8^\circ$ の角度変化が起こる程度のノイズとなる。

- 力に関するパラメタの内、空間スケールに関わる r_e, ρ_e, r_o, r_a についてまとめて述べる。ゴールデンシャイナーの場合、前後の平衡距離は $r_e \sim 2 \text{ BL}$ 、左右の平衡距離は $\rho_e \sim 1 \text{ BL}$ 、最大引力をもたらす距離は $r_a \sim 3 \text{ BL}$ である [76]。ちなみに、 r_a は先の相手の体表パターンが見える距離 $\sim 3 \text{ BL}$ とも一致する [95]。また、カダヤシの場合は、 $r_e \sim 2 \text{ BL}$ と $r_a \sim 3\text{-}5 \text{ BL}$ で概ね一致する [77]。ラミーノーズテトラの実験 [78] によれば、 $\rho_e \sim 1 \text{ BL}$ 、配向相互作用の距離は $r_o \sim 3 \text{ BL}$ であるが、 r_o は ρ_e と r_a の間に位置するため、 $r_o = 2 \text{ BL}$ と定めた。配向相互作用の特徴的な距離は $l_o = 2 \text{ BL}$ とし、これは配向相互作用が半減する距離に対応する [78]。
- 最後に、力の大きさに関するパラメタ $f_r, f_a, \omega_r, \omega_a, \omega_o$ について述べる。ただし、個体の質量を 1 に規格化して扱うため、力の次元は加速度の次元 BL s^{-2} と同じとして表記する。まず、相手個体が前方のおおよそゼロ距離にいるとき、自身の速度はゼロに減衰することを要請すると、自己推進力と斥力の釣り合いから $f_r \sim v_0/\tau_0 = 2.0 \text{ BL s}^{-2}$ と見積もられる。引力は斥力のおおよそ 3 倍のため [76,77]、 $f_a = 6.0 \text{ BL s}^{-2}$ を得る。引力の角速度は特徴的な遊泳速度 v_0 を介して、 $\omega_a \sim f_a/v_0 = 3.0 \text{ s}^{-1}$ と見積もられる。斥力の角速度については、寄与が小さく $\omega_r \lesssim \omega_a/3.5$ 程度 [78] と読み取れるため、 $\omega_r = 0.5 \text{ s}^{-1} (< f_r/v_0)$ と設定した。配向相互作用の角速度 ω_o はコントロールパラメタとするが、おおよそ ω_a の半分であると見積もられる [78]。また、 f_a と ω_a は実験値から直接推定することもできる。ラミーノーズテトラは 0.1-0.2 s で 1-2 BL/s の速度に達するため [78]、加速度は 5-10 BL s^{-2} と見積もられる。サケやニジマスは 1-2 s で 6-10 BL/s の速度に達するため [51]、加速度は 3-10 BL s^{-2} となる。従って、 $f_a = 6.0 \text{ BL s}^{-2}$ の値は妥当なものと言える。さらに、ラミーノーズテトラは 0.1-0.2 s で 0.35 rad 程度回転するため [78]、 $\omega_a \sim 2\text{-}3 \text{ s}^{-1}$ と見積もられる。

表 5: 本モデルのパラメタのまとめ. ここで, 採用値の内, $[\]$ で囲われたものはその範囲の値を取るコントロールパラメタである. 採用値の内, \sim にで示した値は標準値であり, 特に言及しない限りその値を用いる.

記号	定義	実験値	推定値	採用値 (規格化)
h_b	体高	~ 0.3 BL [174]	–	0.3
l_e	目の位置	–	$\lesssim 0.5$	0.4
N_b	視野のピンの数	–	$\gtrsim \mathcal{O}(10^2)$	720
δ_b^{\parallel}	ピンの幅	–	N_b に関連	0.5°
r_0	限界分解能距離	16-39 BL [95]	–	28.6
δ_0^{\parallel}	限界分解能角度	–	r_0 に関連	2°
κ	信号の鋭さ	–	–	~ 2.5
χ	神経節細胞の密度比	–	$\sim 1/3$	[0, 1]
\hat{A}	信号の基準振幅	–	–	1.0
β	相対速度依存性	–	–	~ 4.0
τ_ϕ	ϕ_i のタイムスケール	–	~ 1 s	~ 1.0
v_0	定常遊泳速さ	~ 1.5 - 3.0 BL/s [38, 51, 139]	–	2.0
C	ニュートン抵抗の係数	–	~ 0.25 BL $^{-1}$	0.25
D_v	v_i の拡散係数	–	–	~ 0.01
D_θ	θ_i の拡散係数	–	–	~ 0.01
r_e	前後方向の平衡距離	~ 2 BL [76, 77]	–	2.0
ρ_e	左右方向の平衡距離	~ 1 BL [76, 78]	–	1.0
r_a	最大引力の距離 体表の模様を検知距離	~ 3 - 7 BL [76–78, 95]	–	3.0
r_o	最大配向相互作用の距離	~ 3 BL [78]	–	2.0
l_o	配向相互作用の特徴的長さ	–	~ 2.0 BL	2.0
f_r	推進の最大斥力	–	~ 2.0 BL s $^{-2}$	2.0
f_a	推進の最大引力	–	~ 6.0 BL s $^{-2}$	6.0
ω_r	角速度の最大値 (斥力)	–	$\lesssim 0.8$ s $^{-1}$	0.5
ω_a	角速度の最大値 (引力)	–	~ 3.0 s $^{-1}$	3.0
ω_o	角速度の最大値 (配向)	–	~ 1.5 s $^{-1}$	[0, 3]

10.1.6 数値計算手法

シミュレーションにおける計算手法について述べる. 式 (162), (169), (170) の時間発展方程式は, 時間ステップを $\Delta t = 0.005$ とした Euler-Maruyama 法, ノイズ項は標準ウィーナー過程 $\xi\sqrt{\Delta t}$ に置き換えられる (ξ は標準正規分布から生成される乱数).

続いて, 鉛直角直径などの計算方法について述べる. 個体 i と相手個体 j がいるとき, 視野中の角度 ϕ にある相手個体の体の一部の鉛直角直径は

$$\delta_{ij}^\perp(\phi) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{h_b}{2r_{ij}(\phi)} \right) \quad (179)$$

となる. ここで, $r_{ij}(\phi)$ は個体 i から見て方向 ϕ にある個体 j の体の一部の距離で

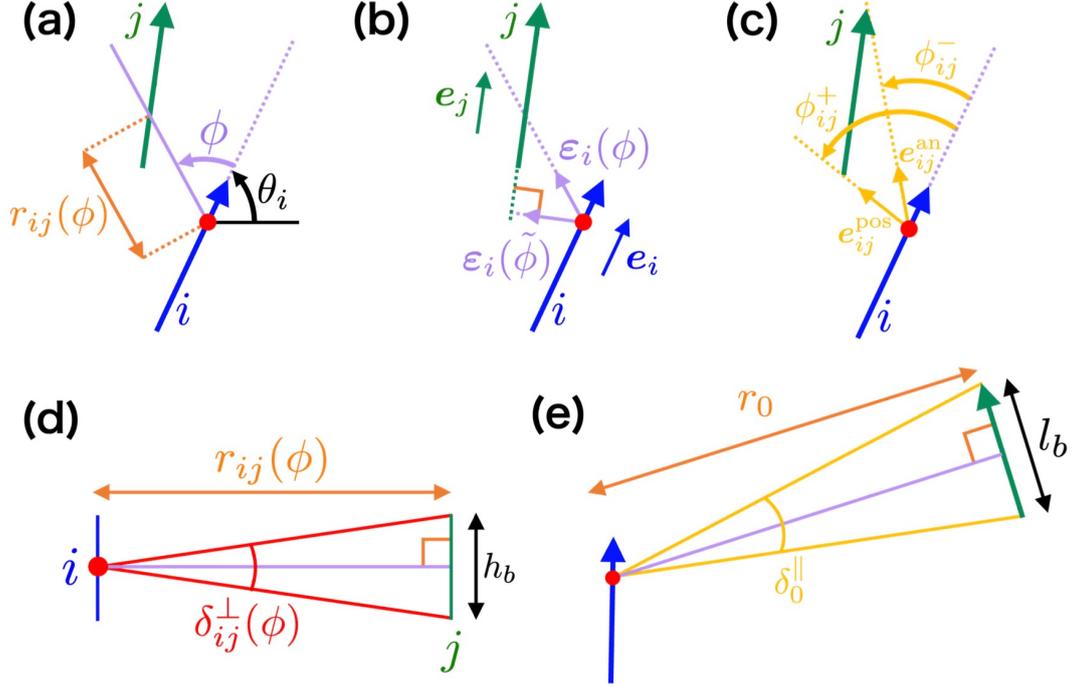


図 100: 本モデルで用いる測定量の図式関係. 赤の点が個体 i の目である. (a)-(c) 距離, 単位ベクトル, 角度の関係. (d)-(e) 距離と角直径の関係. (d) は (a) の紫の実線を含む鉛直断面で切ったものを横から見た図である.

ある (図 100(a),(d) 参照). 次に, 個体 j の体の一部が μ 番目のビンに存在するとして, その鉛直角直径 $\delta_{ij,\mu}^\perp$ を求める. 式 (179) における鉛直角直径 $\delta_{ij}^\perp(\phi)$ はビンの中 ($\phi \in [\phi_\mu - \delta_b^\parallel/2, \phi_\mu + \delta_b^\parallel/2]$) で変化するため, ビンの中での最大鉛直角直径 $\delta_{ij,\mu}^\perp$ を採用する. (計算方法は付録 G に示す.)

続いて, 遮蔽の効果を考える. 個体 i の μ 番目のビン内に複数の個体がいる場合, 距離が最も近い (すなわち鉛直角直径が最大の) 個体のみが見える. その番号を $J_{i,\mu}$ とし, その鉛直角直径

$$\delta_{i,\mu}^\perp = \max_{j=1,\dots,N} \delta_{ij,\mu}^\perp \quad (180)$$

を μ 番目のビンでの最終的な鉛直角直径とする. この個体 $J_{i,\mu}$ に対する相対速さ $u_{i,\mu}$ および運動方向の角度差 $\psi_{i,\mu}$ は, それぞれ

$$u_{i,\mu} = |\mathbf{v}_{J_{i,\mu}} - \mathbf{v}_i| \quad (181)$$

$$\psi_{i,\mu} = \text{sgn}((\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_{J_{i,\mu}}) \cdot \mathbf{e}_z) \cos^{-1}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{J_{i,\mu}}) \quad (182)$$

となる.

10.2 標的に対する選択的意思決定

本章の残りの節では本モデルによるシミュレーション結果を示す. この節ではバーチャルフィッシュを追跡する選択的意思決定の実験 [111] の特徴を本モデルが再現することを示す.

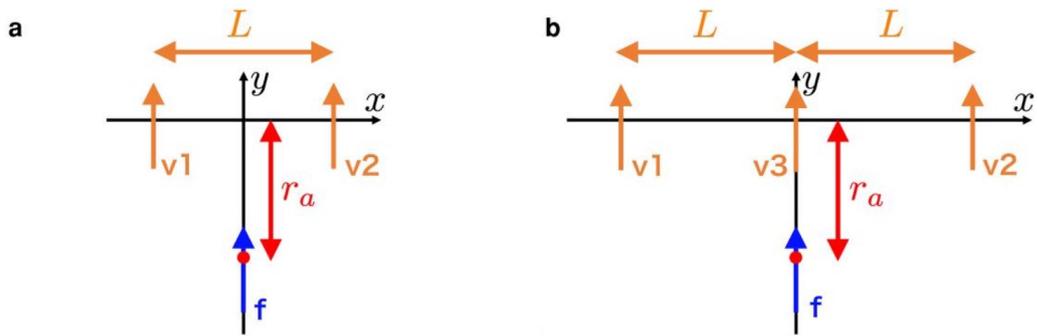


図 101: 初期条件の模式図. (a)2 個の標的, (b)3 個の標的の場合. 青の矢印がモデルの個体 (focal agent, f) であり, x - y 平面を自由に運動する. オレンジの矢印が標的 (virtual agent, v) であり, y 軸に沿って運動する.

10.2.1 初期条件と時間発展

1 つの個体 (focal agent, 以下では f と表記) が, 予め与えられた運動を実行する標的 (virtual agent) を追跡する状況を考える. 初期時刻 ($t = 0$) に, 図 101(a)-(b) のように,

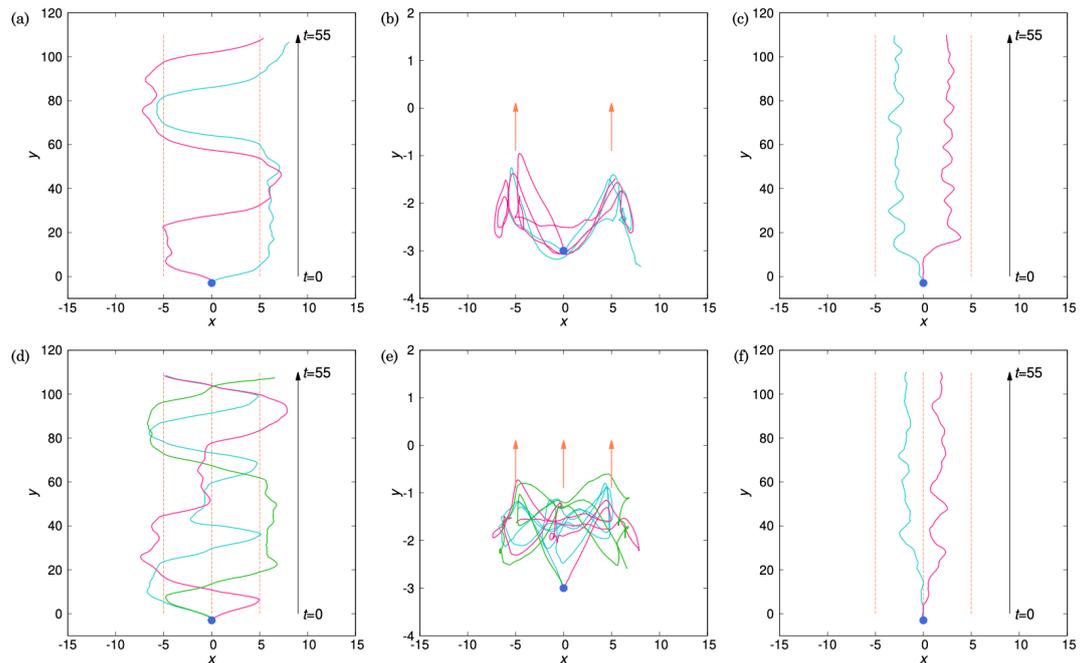


図 102: (a)-(c) 2 個の標的 ($L = 10$), (d)-(f) 3 個の標的 ($L = 5$) における, $t \in [0, 55]$ での個体の軌跡. (a),(b),(d),(e) は本モデル, (c),(f) は従来型の自己駆動粒子モデルによる. 個体の初期位置は青い点で表され, 軌跡の例は水色, ピンク, 緑の実線で表される. (a),(c),(d),(f) は実験室系での軌跡を示し, オレンジの破線は標的の軌跡である. (b) と (e) は標的と共に動く座標系 (速さ v_0 で y 軸方向に動く座標系) での軌跡である. オレンジの矢印は標的を表す.

個体が $x_f = 0, y_f = -r_a$ に位置し、 y 軸方向に速さ $v_f = v_0$ で運動しており、視線の方向は $\phi_f = 0$ (進行方向つまり y 軸方向) にある。一方で、標的 (vn, $n=1, 2, 3$) は $y_{vn} = 0$ (x 軸上) に互いに距離 L を保って配置され、その後は y 軸に沿って一定の速さ $v_{vn} = v_0$ で直線的に運動する。このとき、個体は時間発展方程式 (162)-(170) に従い、標的を追跡する ($t > 0$)。ここではコントロールパラメタは言及しない限り $\chi = 0.3$ と $\omega_o = 1.0$ に固定する。

10.2.2 標的の追跡と確率分布

この初期条件から時間発展させると、図 102(a),(d) のように個体は標的の間を 10 sec 程度のタイムスケールで行ったり来たりすることがわかる。標的と共に動く座標系では個体の軌跡は標的の後ろに位置し、実際に追跡していることがわかる (図 102(b),(e))。

ここで、追跡の様子を L 依存性を定量化するために、個体の位置の確率分布 $P(x, y; L)$ を考える。 $P(x, y; L)$ の測定領域を、標的と共に運動する座標系で $x \in [-15, 15], y \in [-4, 4]$ とし、空間のビンを $\Delta x = \Delta y = 0.25$ とする。各パラメタセットに対して 1000 回シミュレーションを実行し、 $\int_{-15}^{15} dx \int_{-4}^4 dy P(x, y; L) = 1$ となるように規格化した。また、

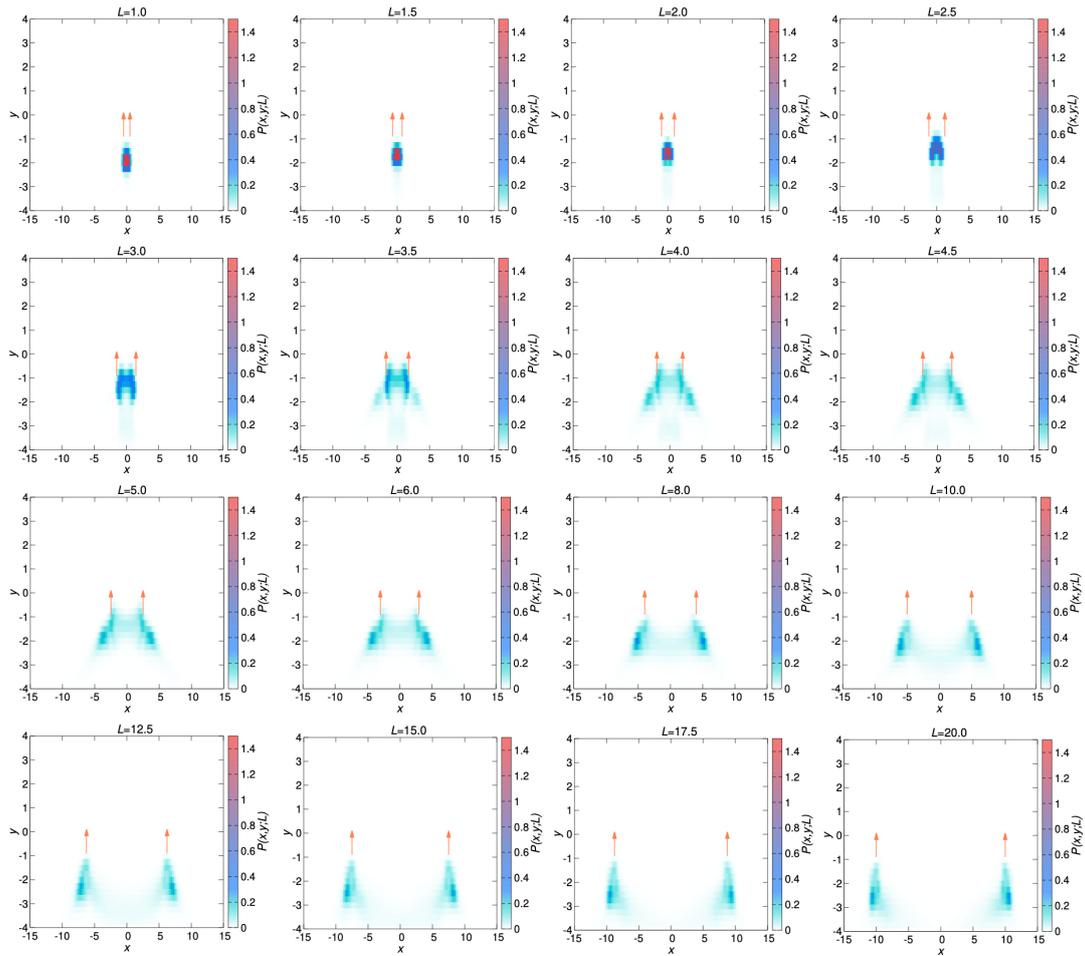


図 103: 2 個の標的に対する確率分布 $P(x, y; L)$ の L 依存性。オレンジの矢印が標的を表す。 L は 1.0(左上) から 20.0(右下) まで変化。

$P(x, y; L)$ が初期条件の個体の位置を含まないよう $t \in [5, 55]$ のシミュレーション時間で平均した。標的の後方での個体の x 軸上の位置を表す確率分布 (y について積分した周辺確率分布) として

$$P(x; L) = \frac{\int_{-4}^0 dy P(x, y; L)}{\int_{-15}^{15} dx \int_{-4}^0 dy P(x, y; L)}. \quad (183)$$

を考える。これは $\int_{-15}^{15} dx P(x; L) = 1$ となるような確率分布である。

確率分布の測定結果を示す。図 103, 104 は、それぞれ 2 個, 3 個の標的に対する $P(x, y; L)$ の結果である。いずれも個体は標的の後方に位置し、標的間距離 L が小さいときは複数の標的の中央、 L が大きいときはどれかの標的の後ろにピークが出現する。これらの分布 $P(x, y; L)$ を y 軸に沿って積分し、その確率分布 $P(x; L)$ を L の関数として表し

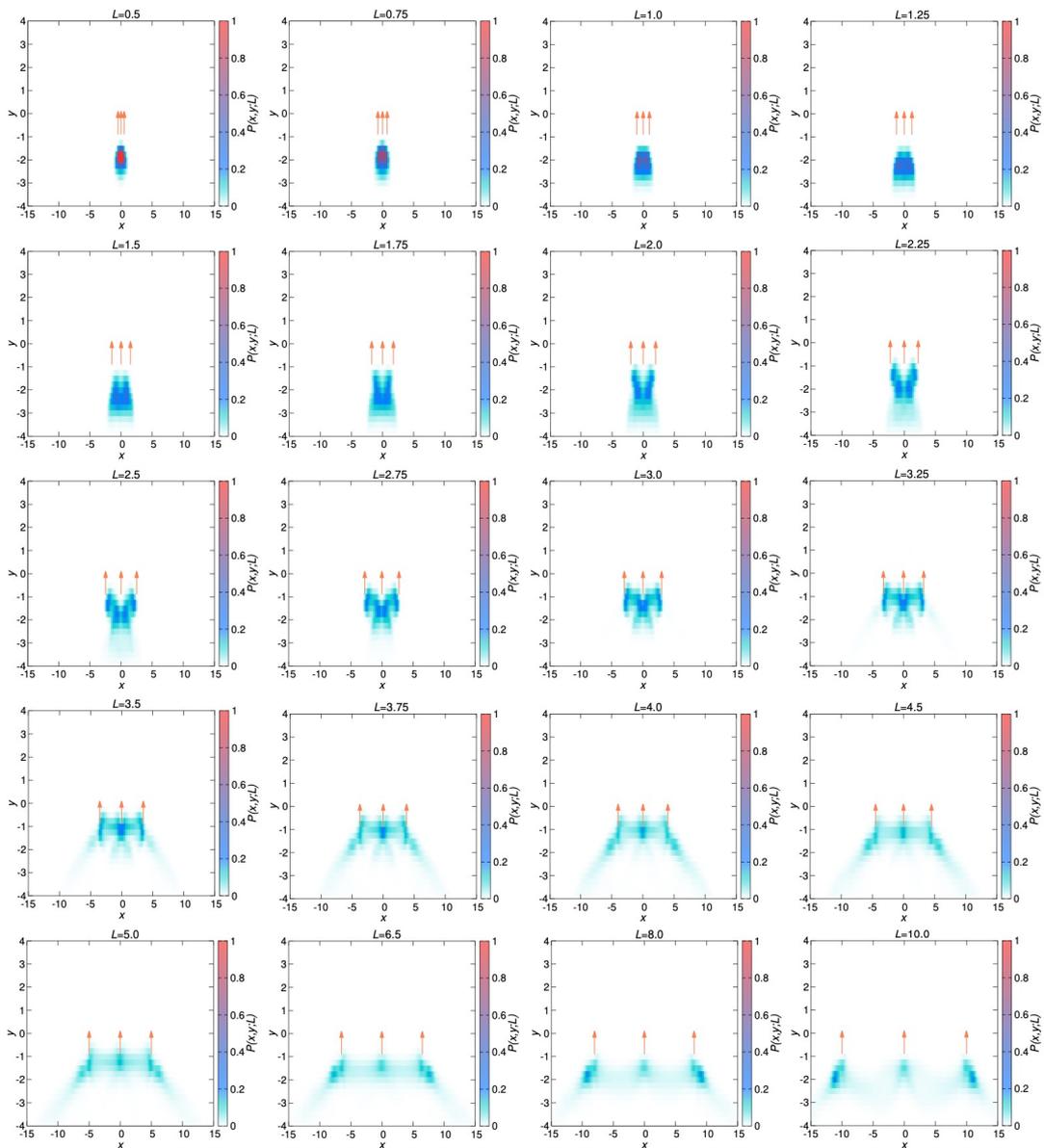


図 104: 3 個の標的に対する確率分布 $P(x, y; L)$ の L 依存性。 L は 0.5(左上) から 10.0(右下) まで変化。

たのが、図 105(a),(b) である。いずれもゼブラフィッシュの実験結果 (図 34) [111] とよく似た分岐構造が見られる。2 個の標的の場合は $L \sim 3$ で二又分岐が起こり、3 個の標的の場合は二又分岐に続いて三又分岐が起こる。すなわち、 $L \lesssim 1$ では 3 個の標的の中心、 $1 \lesssim L \lesssim 3$ では $v1$ と $v3$ の間、または $v2$ と $v3$ の間に位置し、 $L \gtrsim 3$ ではそれぞれの標的の後ろにつく。また、 $L \sim 10$ で標的が十分離れている場合は、確率分布は中心の標的 $v3$ 付近で小さく、左右の標的 $v1$ や $v2$ に向かう確率は相対的に大きくなる。

この結果を実験と比較する。ゼブラフィッシュの実験では、2 個の標的、3 個の標的の場合の分岐は $L \sim 6$ BL で生じた [111]。一方で、本モデルでは $L \sim 3$ BL で分岐が生じた。これらの結果の差は、一因としてゼブラフィッシュの幼魚の目の分解能の低さによる可能性がある。成魚やゴールデンシャイナーといったより体の大きな魚では分解能が高いため [95]、これらの魚を用いれば本モデルの結果に近づくと考えられる。また、3 個の標的において、 L が大きくなると中間の標的に向かう確率が低下するが、これはゼブラフィッシュの実験 [193] でも観測されている現象である。

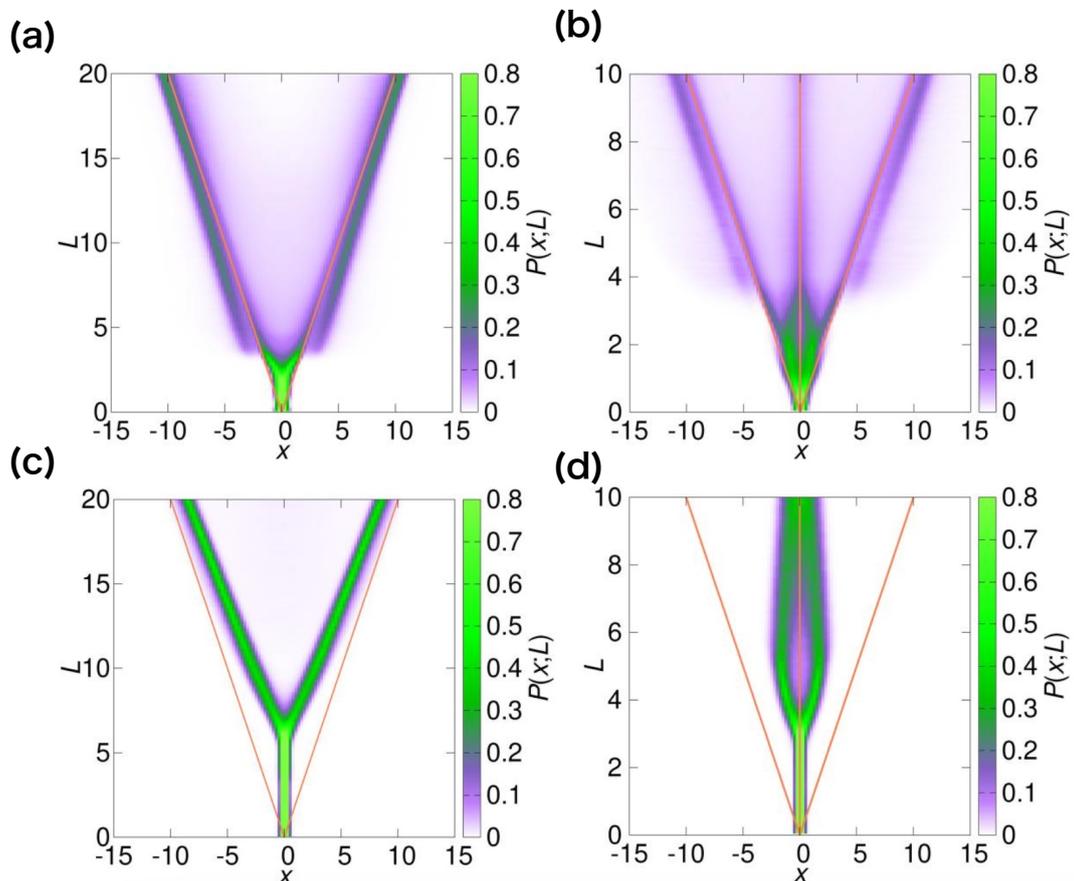


図 105: 2 個の標的 (a),(c), 3 個の標的 (b),(d) に対する選択的意思決定 ($\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$). (a)-(b) 本モデル, (c)-(d) 従来型の自己駆動粒子モデルでの確率分布 $P(x;L)$. オレンジの線は標的の x 軸上の位置を表す。

10.2.3 従来型のモデルとの比較

前節の結果が視線の運動の導入による選択的意思決定の特徴からくるものであることを示すために、従来型の自己駆動粒子のモデルと比較を行う。このモデルでは点粒子の個体を用い、個体には全ての標的からの力の平均の力が働くとする。個体 f の運動方程式は以下で与えられる。

$$\frac{dv_f}{dt} = C(v_0^2 - v_f^2) + \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} F(\phi_{f,vn}, r_{f,vn}) + \eta_{v,f} \quad (184)$$

$$\frac{d\theta_f}{dt} = \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} \Omega(\phi_{f,vn}, r_{f,vn}, \psi_{f,vn}) + \eta_{\theta,f}, \quad (185)$$

ここで、 $n = 1, \dots, N_v$ は標的のラベル番号、 $r_{f,vn} = |\mathbf{r}_{vn} - \mathbf{r}_f|$ は個体 f と n 番目の標的 (vn) との距離、 $\phi_{f,vn}$ は個体 f に対する標的 vn の方位角、 $\psi_{f,vn}$ は個体 f の進行方向に対する標的 vn の運動方向の角度である。力の関数 F, Ω は、元のモデルと同じである(式 (172),(175)) が、力の平均方法を、視線の方向での平均 $\langle \dots \rangle_\mu$ から、全ての標的の平均 $\frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} \dots$ に変更した。

2 個の標的の場合、図 105(c) のように、従来型のモデルにおいても確率分布 $P(x; L)$ の分岐は見られる。しかし、 $P(x; L)$ のピークは複数の標的からの力がつりあう位置にある。実際、従来型のモデルの個体の軌跡は、標的間を行ったり来たりするものではなく、図 102(c),(f) のように 1 つの標的の周りにとどまる。さらに、3 つの個体の場合、 $P(x; L)$

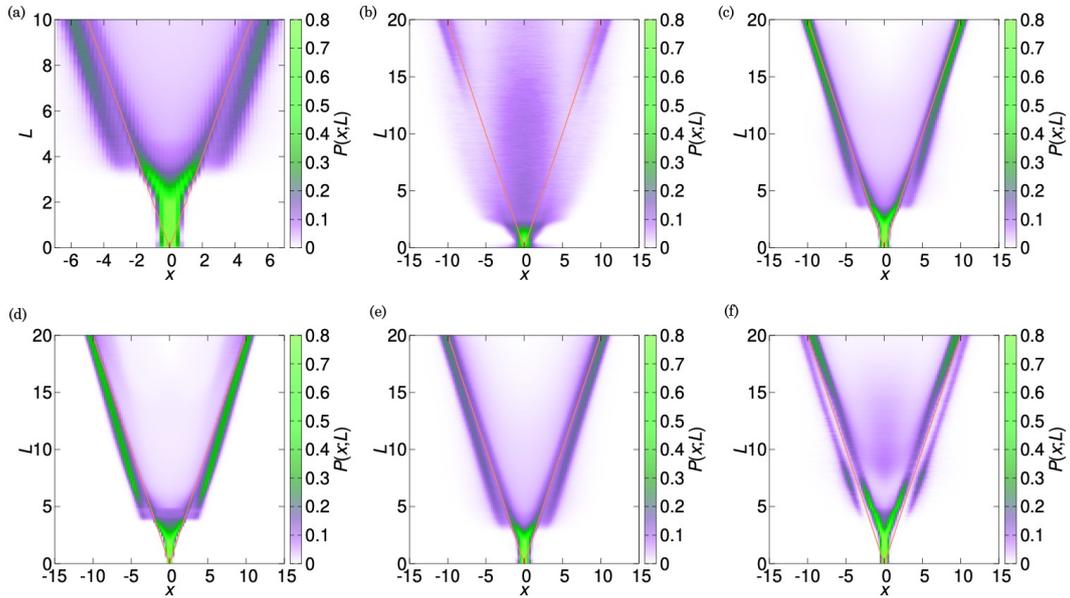


図 106: 2 個の標的の場合の確率分布 $P(x; L)$ のパラメタ依存性。(a) 図 105(a) の拡大図 ($L \leq 10$)。パラメタは $\chi = 0.3$, $\omega_o = 1.0$, $\kappa = 2.5$, $D_v = D_\theta = 0.01$ である。それぞれ (b) $\kappa = 0.1$, (c) $\kappa = 3.5$, (d) $D_v = D_\theta = 0.001$, (e) $D_v = D_\theta = 0.02$, (f) $\chi = 0$, $\omega_o = 3.0$ に変更した場合の $P(x; L)$ 。

には二又分岐が生じるが、 L が大きくなると、三又分岐には発展せず、その分岐は閉じる (図 105(e)). 従って、従来型のモデルでは左右の標的に近づくことはできない。

10.2.4 確率分布のパラメタ依存性

$P(x; L)$ の分岐過程のパラメタ依存性について述べる。基準となるパラメタに対する図 105(a),(b) の拡大図 106(a), 107(a) を示す。

まず、初期条件の個体 f の位置を標的により近づけた場合 (通常の $y_f = -r_a$ から $y_f = -0.5r_a$ に変更) でも、分岐過程はほとんど影響を受けないことが確かめられる (図 107(b)).

次に、視覚刺激の信号の鋭さのパラメタを $\kappa = 2.5$ から変更する。 $\kappa = 0.1$ に対しては、信号の裾野が広がるために、図 106(b), 107(c) のように、分岐過程は起こらなくなる。これは標的が作る信号同士が重なり合い、個体が 1 つの標的に焦点を合わせることができないためである。一方で、 $\kappa = 3.5$ に対しては、 $\kappa = 2.5$ に比べて分岐過程がやや明瞭になる (図 106(c), 107(d)).

次に、ノイズの係数 D_v と D_θ を $D_v = D_\theta = 0.01$ から変更する。ノイズを弱くした場合でも ($D_v = D_\theta = 0.001$) 大きくした場合でも ($D_v = D_\theta = 0.02$), 分岐過程の挙動はそれほど変化しない。ただし、3 個の標的の場合の $L \sim 10$ 付近に注目すると、ノイズが弱い場合は左右の標的により引き付けられ、ノイズが強い場合は概ね均等に各標的に向かうことがわかる (図 106(d),(e), 107(e),(f)). 前者は、標的が細長い形状を持つため、個体 f から見て左右の標的の見た目の大きさが中央の標的に比べ大きくなり、ノイズが効かないときは左右の標的に惹かれやすいためである。

また、パラメタ $\chi = 0$ と $\omega_o = 3.0$ の場合についても調べた。この場合、配向相互作用が強いため、標的の横に位置する傾向が強くなったが、分岐過程の特徴は保たれ

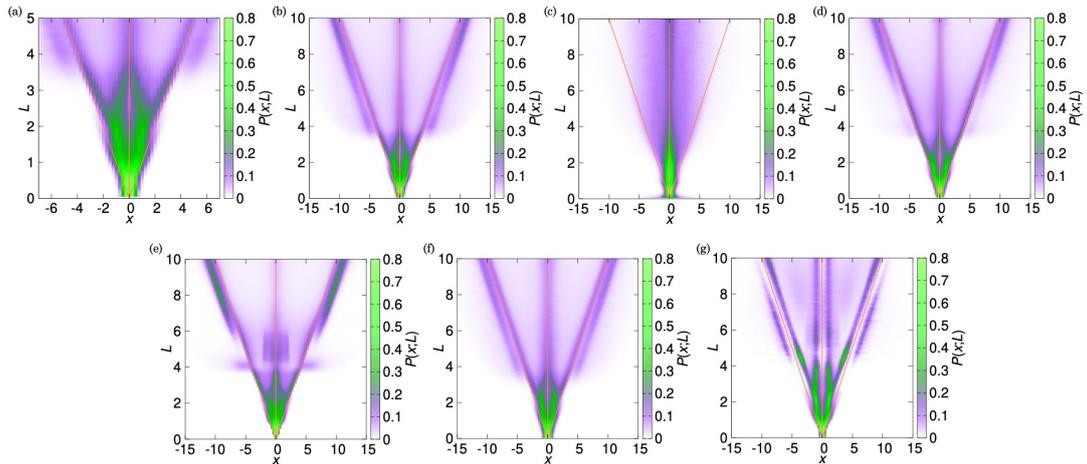


図 107: 3 個の標的の場合の確率分布 $P(x; L)$ のパラメタ依存性。(a) 図 105(b) の拡大図 ($L \leq 10$). パラメタは基準となる $\chi = 0.3$, $\omega_o = 1.0$, $\kappa = 2.5$, $D_v = D_\theta = 0.01$ であり、個体 f の初期条件の位置は $(x_f, y_f) = (0, -r_a)$ である。それぞれ (b) $(x_f, y_f) = (0, -0.5r_a)$, (c) $\kappa = 0.1$, (d) $\kappa = 3.5$, (e) $D_v = D_\theta = 0.001$, (f) $D_v = D_\theta = 0.02$, and (g) $\chi = 0$, $\omega_o = 3.0$ に変更した場合の $P(x; L)$.

た (図 106(f), 107(g)).

10.2.5 標的の位置の非対称性

最後に, 図 108(a) のように非対称に配置された 3 個の標的について考える. 標的 v_1, v_2 が $x = \pm L$ に, 標的 v_3 が $x_{v_3} = L_{\text{asym}} \in [0, L]$ の位置に存在する. 図 108(b)-(f) は x 座標および L_{asym} の関数として確率分布 $P(x; L, L_{\text{asym}})$ を, さまざまな L の値について示す. まず, $L_{\text{asym}} = 0$ においては, 図 105(b) と同じく, $L = 2.0$ と $L = 2.5$ の場合は二又分岐, $L = 4.0$ と $L = 5.0$ の場合は三又分岐, $L = 3.0$ の場合はその中間の状態にある. いずれの L においても v_3 が v_2 側へシフトしていき, 分岐のピークは v_3 に近づいていき, 分布は $L_{\text{asym}} \rightarrow L$ の極限で 2 個の標的の二又分岐に収束していく. 特に, $L \gtrsim 3.0$ の場合は, 中間の L_{asym} の値で, ピークが v_2 と v_3 の間に位置し, v_1 に対する確率はほとんど

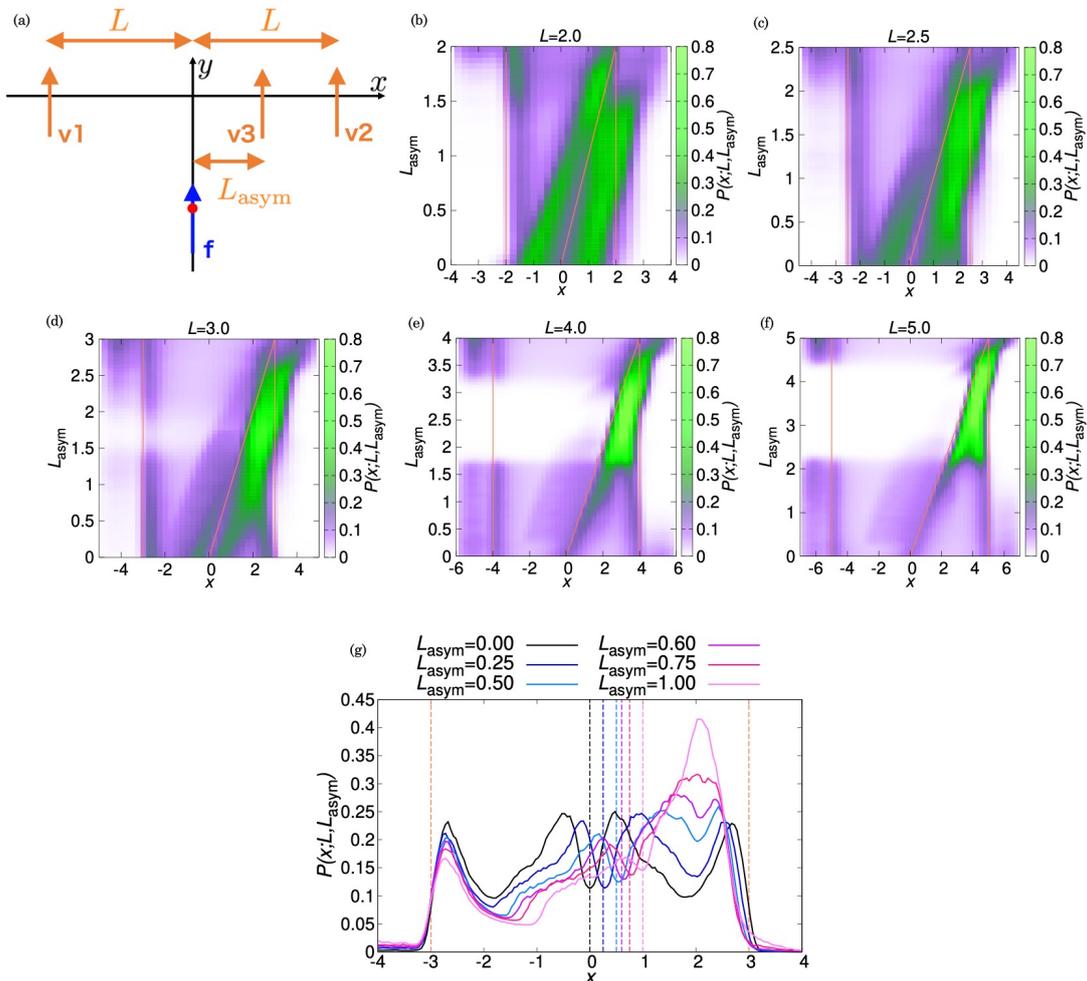


図 108: 非対称に配置された 3 個の標的を追跡する個体の位置 (x 座標) の確率分布 $P(x; L, L_{\text{asym}})$. (a) 初期条件の模式図. (b)-(f) L ごとにプロットした x と L_{asym} の関数としての確率分布 $P(x; L, L_{\text{asym}})$. オレンジの実線は標的の x 座標を表す. (g) $L = 3.0$ と $L_{\text{asym}} \in [0, 1]$ に対する $P(x; L, L_{\text{asym}})$. 左右のオレンジの破線は標的 v_1 と v_2 , 中心に近いその他の破線は各 L_{asym} に対する標的 v_3 の x 座標を表す.

どゼロとなる. 図 108(g) は $L = 3.0$ での $L_{\text{asym}} \in [0, 1]$ に対する, $P(x; L, L_{\text{asym}})$ の変化を示したものである. 対称な分布 $P(x; L, L_{\text{asym}})$ を持つ $L_{\text{asym}} = 0$ の状況から, L_{asym} を増加させていくと, 右の 2 つのピークは 1 つに結合し, 左のピークは小さくなるのがわかる. また, v_3 の近くには左側に小さなピークがある. 三又分岐が起こり始める $L = 3.0$ を採用した理由は, ゼブラフィッシュの実験 [111] においても, 三又分岐付近での非対称標的に対する挙動が研究されていたためである. 実験との比較により, 3 つのピークの位置とその相対的な位置関係は定性的な一致を示す.

10.3 集団運動とパターン相図

この節では多数匹の集団運動の結果について述べる. 初期条件としては, 100 個体が半径 7 の円の中にランダムに配置している状況を設定する. ただし, 初速は $v_i = v_0$ とし, 体の角度 θ_i と視線の角度 ϕ_i は $[-\pi, \pi]$ の範囲の一様分布からランダムに定める.

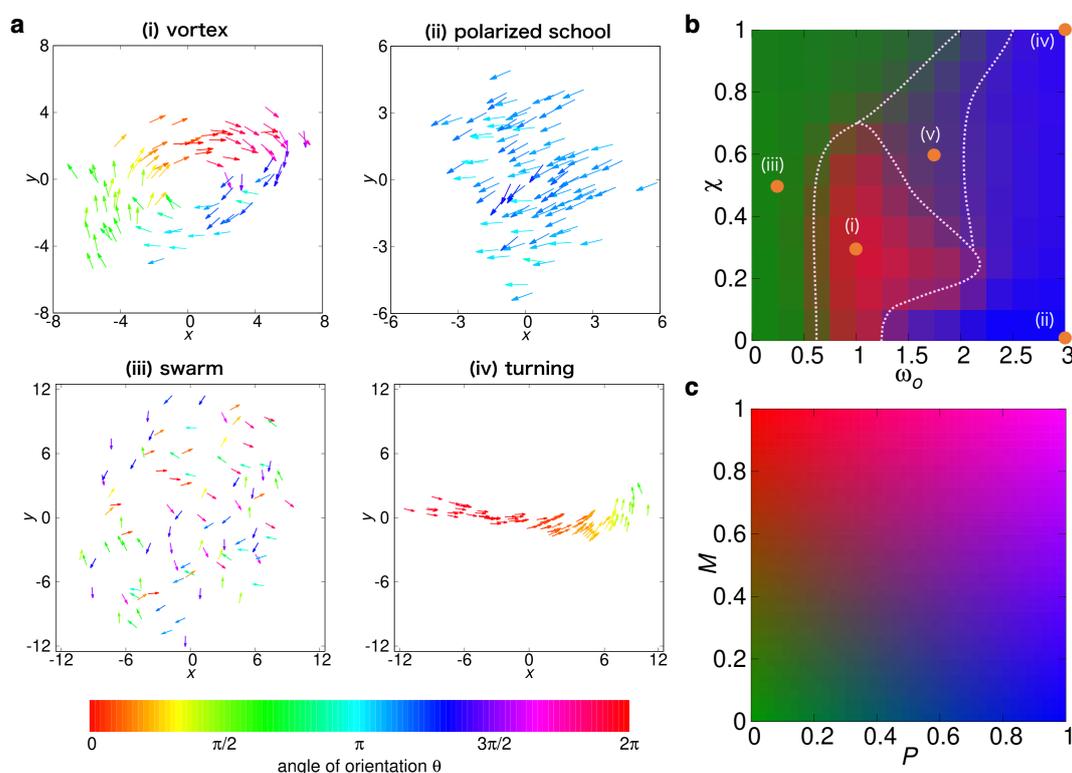


図 109: 集団運動のスナップショットと相図. (i)-(v) は以下のパターンとパラメタ (χ, ω_o) に対応する. (i) vortex: $\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$. (ii) polarized school: $\chi = 0, \omega_o = 3.0$. (iii) swarm: $\chi = 0.5, \omega_o = 0.25$. (iv) turning: $\chi = 1.0, \omega_o = 3.0$. (v) unsteady aggregation: $\chi = 0.6, \omega_o = 1.75$. (a) $N = 100$ 個体の集団パターン. 矢印は 1 体長の個体を表す. 色は運動の方向に対応する. (b) パラメタ (χ, ω_o) に対する集団パターンの相図. 色は (c) の秩序変数 (P, M) の値に対応する. オレンジの点は (i)-(v) の各パラメタ値を表し, 点線は集団パターンの定性的な境界線を表す.

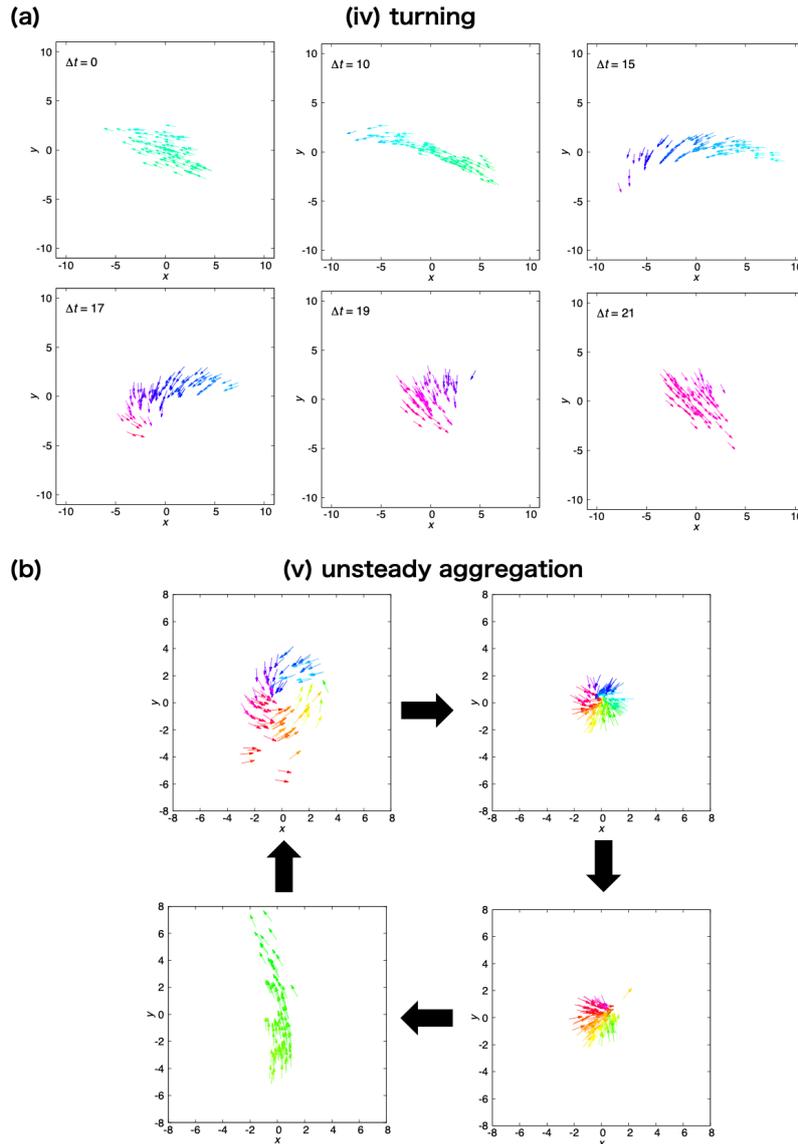


図 110: $N = 100$ 個体の集団パターンのスナップショット. (a) turning $\chi = 1.0, \omega_o = 3.0$, (b) unsteady aggregation $\chi = 0.6, \omega_o = 1.75$. Δt は経過時間である. 各スナップショットは図 109(a) と同じ方法で描画している. (a) では, $\Delta t \lesssim 10$ において polarized school が伸長し, $\Delta t \lesssim 19$ で前端が回り込みを始め, $\Delta t = 21$ で再び真っ直ぐに向きの揃った状態となる. (b) では, (左上)vortex になりかけたところから, (右上) 群れの内側に向かって個体が積み重なる. (右下) それらが徐々に向きを揃え, (左下) 伸長したクラスターとなり, 前端が回り込み始めることで, 再び (左上) のような vortex に戻る.

10.3.1 集団パターンの分類

神経節細胞の密度比のパラメタ χ と配向相互作用による角速度のパラメタ ω_o を変化させると, 図 109(a), 110 に示す集団パターンを得た. これらは以下のように分類される. (i) vortex: 個体たちが共通の回転軸のまわりを回る, (ii) polarized school: 向きが揃い, 群れ全体が同じ方向へ進む, (iii) swarm: 個体たちの向きがランダムな状態, (iv) turning:

polarized school から断続的に伸長し、曲がったクラスターになるもの (図 110(a)), (v) unsteady aggregation: vortex が崩壊し、その後 polarized school に変形した後、再び vortex に戻るもの。このサイクルは繰り返され、不定の時間間隔で生じる (図 110(b))。動画については [197] を参照。

図から読み取ると、これらのパターンの大きさは 10(体長) のオーダーであり、これらは 70 匹, 150 匹のゴールデンシャイナーの群れの大きさ [16] と比べても妥当である。また, turning はクラスターの形としては、流体相互作用を導入した先行研究 [132] でも報告されていた。流体モデルでは全個体と相互作用する長距離相互作用のために、カーブした形が保たれたまま旋回する turning の挙動が得られていたのに対し、本モデルでは視覚の遮蔽効果により少数の相手個体とのみ相互作用するため、先頭の個体の向きの方角転換に鋭敏に反応し急激な旋回が得られた。

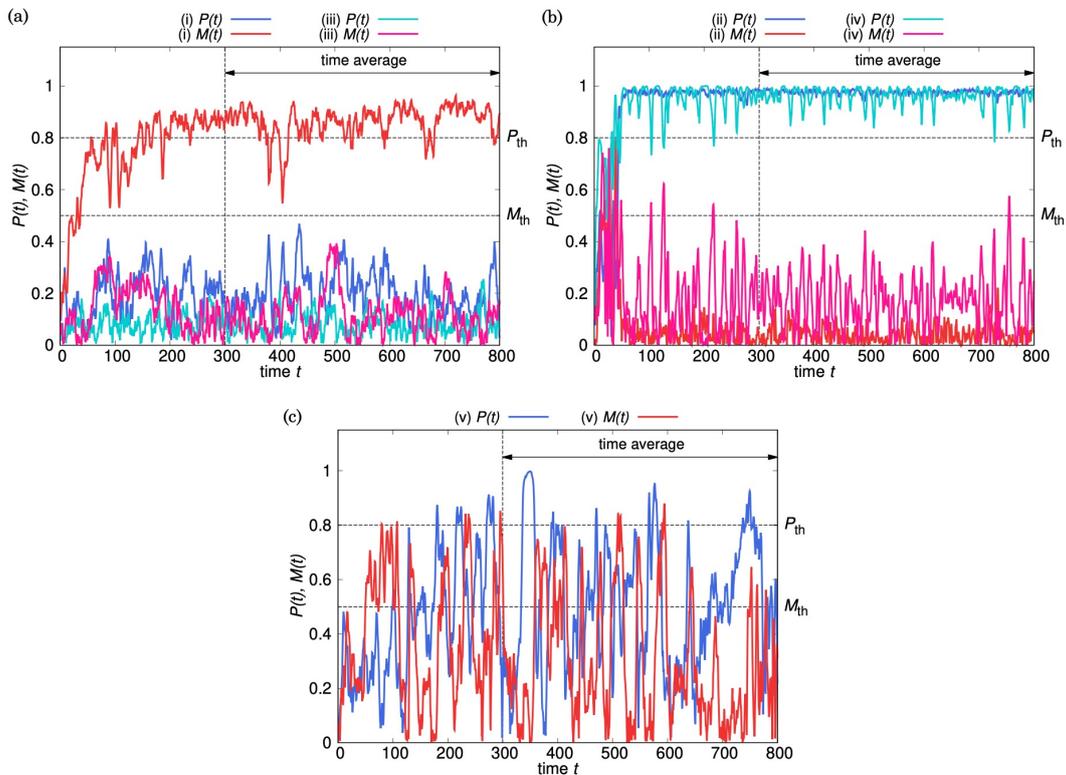


図 111: (a) (i) vortex と (iii) swarm, (b) (ii) polarized school と (iv) turning, (c) unsteady aggregation に対する秩序変数 $P(t)$, $M(t)$ の時間発展。青またはシアンの線が $P(t)$, 赤またはピンクの線が $M(t)$ を示す。時間窓 $t \in [300, 800]$ は時間平均の時間幅を表し, P_{th}, M_{th} は P, M の閾値に対応する。vortex は大きい M と小さい P の値を取り, swarm は P, M 共に小さな値を取る。polarized school と turning の両方が大きな P と小さな M の値を取るが, turning では P, M にスパイクが出現し, これが方向転換のタイミングに一致する。 P, M の大きな揺らぎが vortex-stuck-polarized 状態の繰り返すと, 不定の時間感覚を示す。

10.3.2 集団パターンの相図

集団パターンを定量化するために、配向秩序変数 P と回転秩序変数 M を用いる。図 111 に示すように、パターン (i)-(iii) のような定常状態のクラスターでは直ちに秩序変数が収束することがわかり、(iv) に対しては旋回のタイミングなどがわかる。

ここで、複数回にわたるシミュレーションでの秩序変数の平均化の際に、クラスターが分裂してしまう場合を除くため、初めにクラスター分裂の定義を示す。各シミュレーションの最後に以下のいずれかの条件に当てはまった場合、分裂が起こったと判定する。

- 条件 1: 重心 $\mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i / N$ からの個体の最大距離が $3r_0 \sim 85$ 以上の場合。
- 条件 2: 最大クラスターに含まれる粒子の数が $0.95N$ よりも少ない場合。ただしクラスター判定の半径は限界分解能距離 $r_0 \sim 28$ を用いる。

シミュレーションの途中で分裂が起こった場合、分裂した小さなクラスターは、シミュレーションの終了時間 ($t = 800$) には $\mathcal{O}(1000)$ 程度の距離まで離れていくため、条件 1 により判定が行われる。これは定常的な集団パターンの大きさ $\sim \mathcal{O}(10)$ より十分大きなものである。また、少数の個体を含むクラスターは最大のクラスターに再び戻っていく傾向も見られるため、条件 2 では粒子数にクラスター判定の許容範囲を設けた。条件 1 では分裂していると判定できないが、条件 2 で判定できる状況は、例えば、2 つの中程度の向きの揃ったクラスターが平行に移動している場合が当てはまる。また、25 回中に分裂判定が生じた割合を p_s と定める。

集団パターンの相図を作成するために、量 $Q(t)$ の時間平均 \tilde{Q} を、分裂が起こらなかったサンプルについて、 $t \in [300, 800]$ で時間平均したものと定め、それらを 25 回のシミュレーションで算術平均を取ったものを平均値 Q と定める。 Q の標準偏差も同様に、分裂が起こらなかったサンプルから得た。

ここからパターン相図を示す。各パラメタ (χ, ω_0) に対して秩序変数の平均値 P, M を $\chi \in [0, 1]$, $\omega_0 \in [0, 3]$ の範囲でプロットしたものが図 109(b) である。クラスターの安定性を最大化するために、ノイズレス ($D_v = D_\theta = 0$) の状況を考えて。配向相互作用の強さ ω_0 を大きくすると、個体間の向きが揃い、クラスターは swarm, vortex, polarized school, または turning の順に変化する。 $\chi \lesssim 0.5$ に対しては、vortex が $\omega_0 \lesssim 1.5-2.0$,

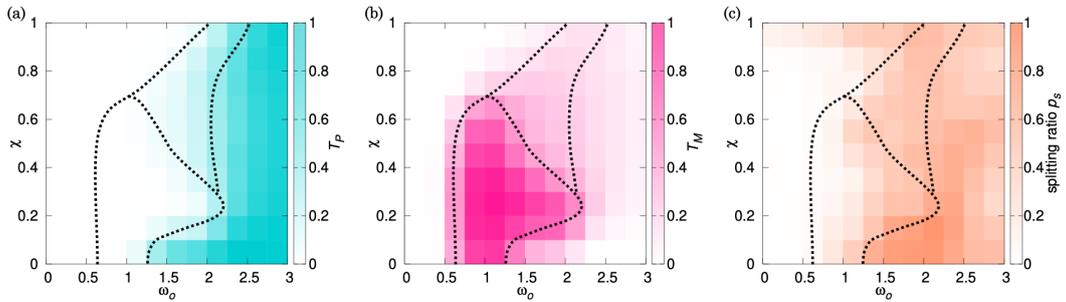


図 112: (a) 配向秩序変数の持続時間 T_P , (b) 回転秩序変数の持続時間 T_M , (c) 分裂の割合 p_s のマップ。点線は図 109(b) と同じく、定性的な集団パターンの境界線である。

polarized school が $\omega_o \gtrsim 1.5-2.0$ で出現し, $\chi \gtrsim 0.5$ に対しては, unsteady aggregation が $1.5 \lesssim \omega_o \lesssim 2.0$, turning が $\omega_o \gtrsim 2.0$ で出現する. また, swarm はあまり χ には依存せず, ω_o の大きさに支配される. χ の実験値はおおよそ $1/3$ であるが (表 5 参照), この値の付近で vortex, polarized school, swarm といった豊富なパターンが出現する.

また, 配向秩序変数の持続時間 T_P と回転秩序変数の持続時間 T_M も測定した. これらはそれぞれ, $t \in [300, 800]$ の時間窓において, 秩序変数 $P(t)$, $M(t)$ が閾値 $P_{th} = 0.8$, $M_{th} = 0.5$ を超えるような時間と定義した. ただし $t \in [300, 800]$ の時間窓において持続時間を $[0, 1]$ の範囲で規格化し, 25 回中, 分裂しなかった場合のシミュレーションについて算術平均を取ったものを T_P , T_M と定義した. 図 112(a),(b) に T_P , T_M のパラメタ (χ, ω_o) 依存性を示す. これにより, vortex では大きな T_M の値, polarized school と turning では大きな T_P の値, swarm では小さな T_P , T_M の値を取ることが確認された.

10.3.3 集団パターンのパラメタ依存性

本節では集団パターンの χ , ω_o 以外のパラメタに対する依存性について示す. 特に (i) vortex ($\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$) について詳しく扱う. 図 113(a)-(c) に示すように, 本モデルで通常用いるパラメタ値 $\kappa = 2.5$, $\beta = 4.0$, $\tau_\phi = 1.0$ では, 大きな回転秩序変数 M と小さな分裂の割合 p_s を持つ. この結果は以下のように解釈することができる. 信号のピーク幅が広い場合, 視線の運動はゆっくりとなり, 相手個体の運動に視線の運動が追いつくことができなくなるため, 群れはバラバラになってしまう. このような状況が小さい κ や大きい τ_ϕ で起こる. 一方で, 信号のピークが鋭すぎる場合, 視線が 1 つの相手個体に向く傾向が

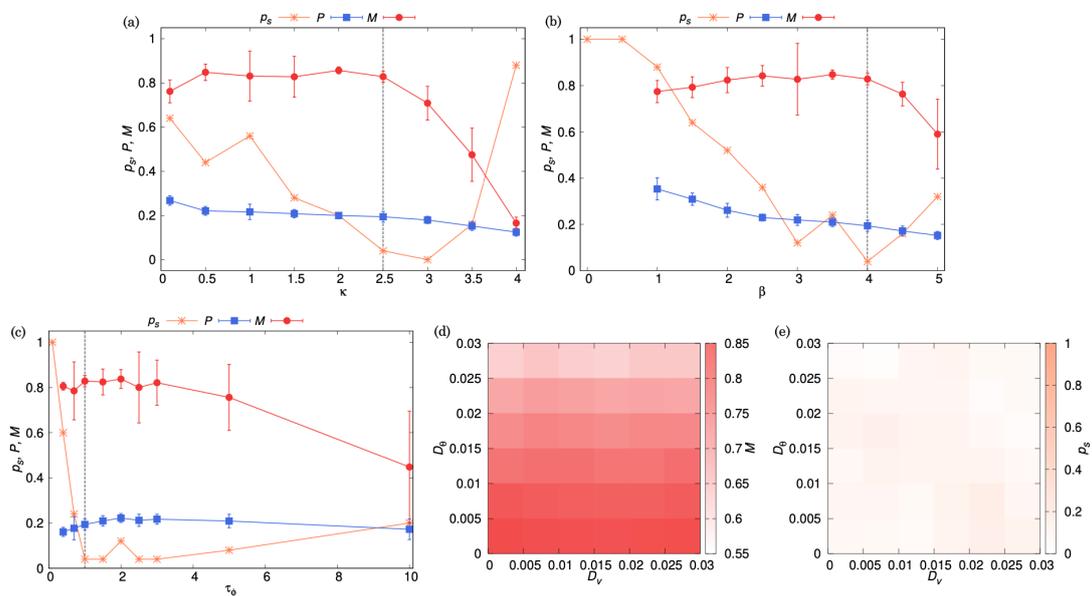


図 113: (i) vortex ($\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$) のパラメタ依存性. 分裂の割合 p_s (オレンジ), 配向秩序変数 P (青), 回転秩序変数 M (赤) を (a) 信号の鋭さ κ , (b) 相対速度依存性 β , (c) 視線の運動のタイムスケール τ_ϕ の関数として表示した図. エラーバーは標準偏差を表す. 黒破線は本モデルで通常用いられるパラメタ値を表す ($\kappa = 2.5$, $\beta = 4.0$, $\tau_\phi = 1.0$). また, $p_s = 1$ の場合は秩序変数の値は示していない. (d) M と (e) p_s のノイズ (D_v , D_θ) 依存性.

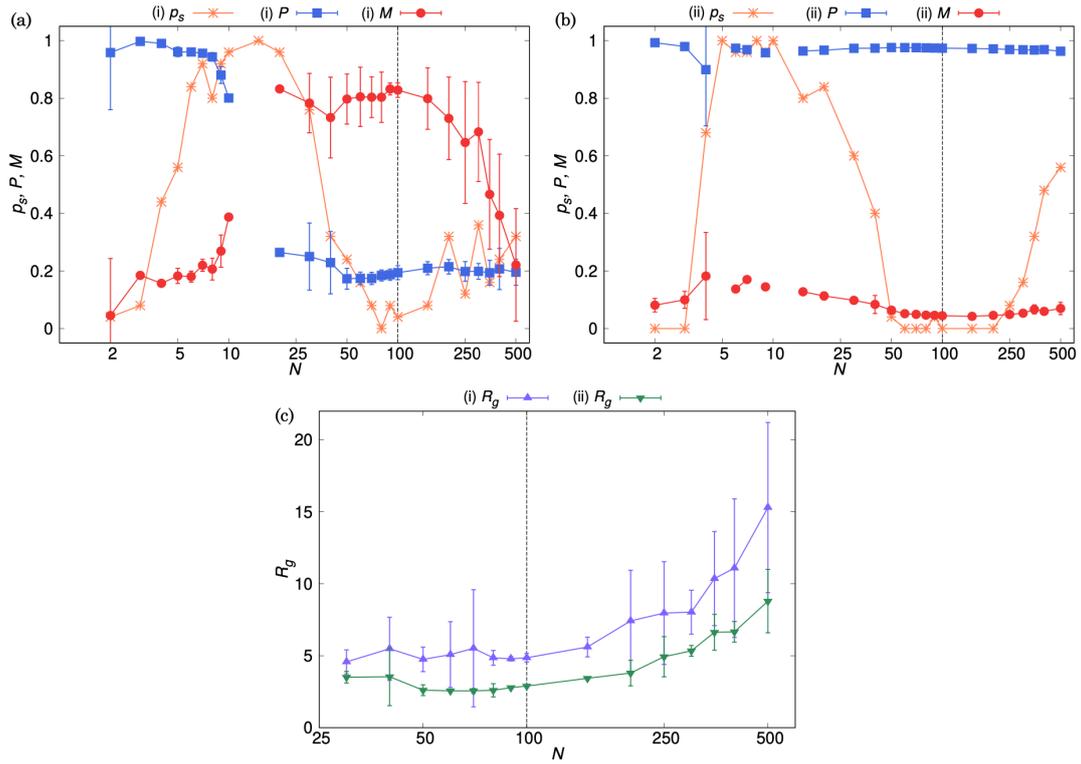


図 114: (i) vortex ($\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$) と (ii) polarized school ($\chi = 0, \omega_o = 3.0$) の個体数 N に対する依存性. (a) vortex, (b) polarized school における p_s, P, M の N に対する依存性. 黒破線は $N = 100$ を表す. ただし (b) では向きを揃えた場合の初期条件を用いている. (c) 慣性半径 R_g の N 依存性. (i) が紫の実線, (ii) が緑の実線である.

強くなり, 他の個体に視線を向けることができず, クラスタは多くの小さなクラスタに分裂してしまう. このような状況が大きい κ , 小さい β , および小さい τ_ϕ で起こる. 加えて, ノイズ D_v と D_θ に対しては, 回転秩序変数は D_θ の影響を強く受けるが, 分裂の割合 p_s にはほとんど影響がないことが示される (図 113(d),(e)).

続いて, 個体数 N に対する依存性を考える. 初期条件においてクラスタが N によらず同じ密度を保つように, 初期クラスタの半径を $7 \times \sqrt{N/100}$ と定める. (i) vortex ($\chi = 0.3, \omega_o = 1.0$) と (ii) polarized school ($\chi = 0, \omega_o = 3.0$) を対象としたとき, 図 114(a),(b) に示すように, クラスタは $50 \lesssim N \lesssim 200$ では比較的安定で, $4 \lesssim N \lesssim 50$ または $N \gtrsim 200$ では分裂が起こりやすくなる. 例えば, $N \gtrsim 200$ のクラスタが分裂した場合, $50 \lesssim N \lesssim 200$ のクラスタとなれば安定し, $4 \lesssim N \lesssim 50$ のクラスタとなれば, さらに分裂して他のクラスタに融合するか, そのまま遠ざかっていくか, など複雑なクラスタの時間発展過程をたどる. このようなカオス的時間発展から統計的な情報を得るのは難しい. このような不安定性はモデルの詳細によらず, 系の 2 次元性からくる特有な現象であると考えられている [131, 132]. 実際, 3 次元では各個体の前後左右上下に個体がいるため, 相互作用により渦は安定しやすい傾向にあるが [137, 144], 2 次元では渦を保つためには前後左右にしか相手がないため, 相互作用によって安定化しにくい.

また、クラスターのサイズを慣性半径

$$R_g(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N \mathbf{c}_i^2(t)}, \quad (186)$$

の時間平均を用いて定量化した。ここで、 $\mathbf{c}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_G(t)$ はクラスターの重心からの個体の相対位置である。図 114(c) に示すように、 $N \lesssim 90$ では R_g はほとんど一定であるが、 $N \gtrsim 90$ では N の増加に伴って R_g が増加する。

10.3.4 polarized school の初期条件依存性

最後に polarized school の初期条件依存性について述べる。図 112(c) に示すように polarized school, turning や unsteady aggregation において分裂がよく起こる。そこで、この分裂が初期条件に依存するかどうかを調べるために、個体の向き揃った初期条件を用いて検証した。位置は前の初期条件と同じだが、各個体の方位角は $\theta_i(t=0) = 0$ とした。図 115(a) に示すように、向き揃った初期条件ではランダムな初期条件に比べ p_s が減少し、polarized school が現れる $\chi \sim 0$ 付近では分裂は減少に起こらない。従って、polarized school の分裂は主に初期条件における向きのランダム性によることがわかった。

一方で、中程度以上の χ では分裂が大きく抑えられていない。シミュレーションによるとクラスター前方から分裂が生じ始める。そこで、細長いほど分裂しやすいと思われるためクラスターの大きさのアスペクト比の χ 依存性を調べる。アスペクト比を定量化するために、以下の量を考える。慣性モーメントテンソル

$$I_{ab} = \sum_i (\mathbf{c}_i^2 \delta_{ab} - c_{i,a} c_{i,b}), \quad (187)$$

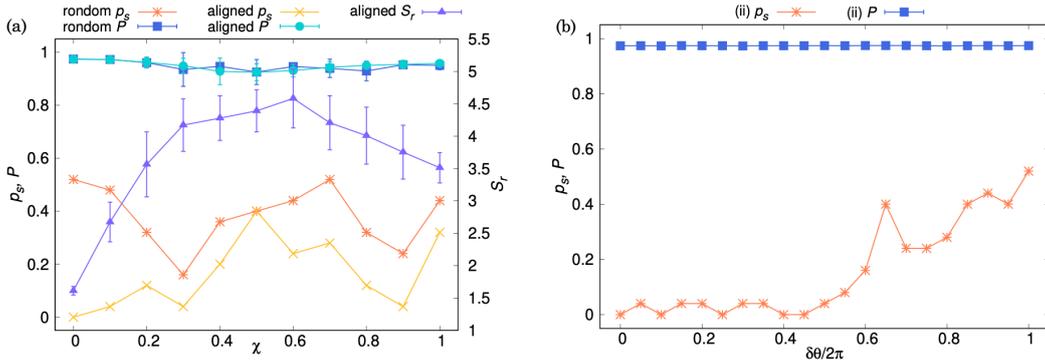


図 115: 向き揃ったクラスターと分裂の関係。(a) $\omega_o = 3.0$ での、 χ の関数としての p_s , P (左軸) と S_r (右軸)。ランダムな初期条件での p_s がオレンジ、向き揃った初期条件での p_s が黄色、ランダムな初期条件での P が青、向き揃った初期条件での P が水色、向き揃った初期条件での S_r が紫の線で示される。(b) polarized school の場合 ($\chi = 0, \omega_o = 3.0$) の初期条件の角度揺らぎ $\delta\theta$ の関数としての p_s , P 。オレンジの線が p_s 、青の線が P である。

$(a, b = x, y)$ の固有値として、主慣性モーメント

$$I_1 = \frac{\text{tr } I + \sqrt{(\text{tr } I)^2 - 4 \det I}}{2}, \quad I_2 = \frac{\text{tr } I - \sqrt{(\text{tr } I)^2 - 4 \det I}}{2}. \quad (188)$$

を得る．対応する規格化された固有ベクトルを \mathbf{u}_α ($\alpha = 1, 2$) とする． $\hat{\mathbf{u}}_\alpha$ 方向のクラスターの長さを

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{c}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_\alpha(t)|, \quad (189)$$

として、アスペクト比 S_r を

$$S_r(t) = S_2(t)/S_1(t). \quad (190)$$

の平均値として定義する． $I_1 > I_2$ より、一般に $S_r > 1$ となる．図 115(a) は、 $\chi = 0.2-1.0$ において、クラスターが大きなアスペクト比 S_r を持っていることを示している．

さらに、polarized school ($\chi = 0, \omega_o = 3.0$) に対して、初期条件のランダム性の影響を詳しく調べた．初期条件として、方位角が $\theta_i(t=0) \in [-\delta\theta/2, \delta\theta/2]$ の範囲でランダムな場合を考える ($\delta\theta$ は定数)．図 115(b) に示すように、polarized school は $\delta\theta = \pi$ 程度まで安定であり、 $\delta\theta > \pi$ では分裂する確率が $\delta\theta$ とともに大きくなる．また、polarized school のクラスター内の個体の平均的な角度変位 Θ は各個体の方位角の時間自己相関関数

$$\Theta(\delta t) = \frac{180}{\pi} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta\vartheta_i(t+\delta t))^2}, \quad \delta\vartheta_i(t+\delta t) = \{\theta_i(t+\delta t) - \theta_P(t+\delta t)\} - \{\theta_i(t) - \theta_P(t)\}. \quad (191)$$

として定義され、図 116 にその測定結果を示す．ここで、 $\theta_P(t)$ は配向秩序変数ベクトル $\mathbf{P}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)$ の方位角であり、 δt は経過時間である．平均的な角度変位が $\Theta \sim 20^\circ = \pi/9$ 程度であることを考えれば、polarized school が不安定化する $\delta\theta = \pi$ は十分大きな値であると言える．

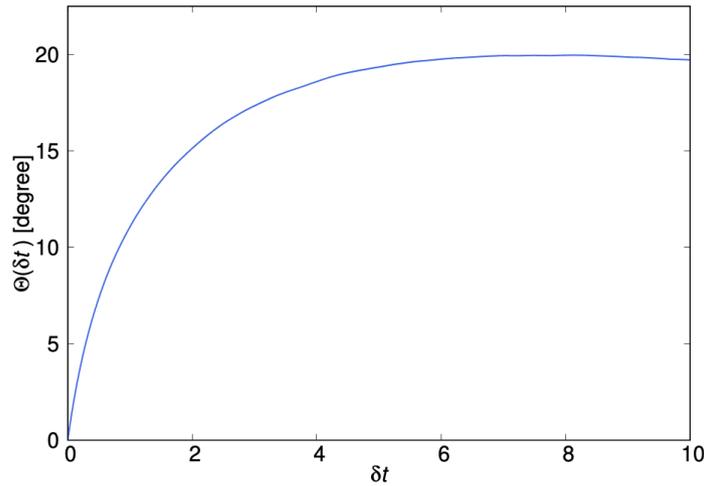


図 116: polarized school の場合 ($\chi = 0, \omega_o = 3.0$) の方位角の時間自己相関関数 $\Theta(\delta t)$. 時間平均は $t \in [300, 20300]$ の時間窓で行われた．経過時間 $\delta t \gtrsim 5$ で $\Theta \sim 20^\circ$ に収束する．

10.4 視覚の遮蔽効果とトポロジカル相互作用

10.4.1 クラスタ中の視覚情報

本節では、個体数 $N = 100$ のクラスタ内での各個体の視野を占める像の具体的な状態について解析する。まず、それらの特徴づける量を定義する。視野全体の内、像に占められた視野角度の割合 (占有率) を次のように定義する。

$$p_v(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N_b} \sum_{\mu=1}^{N_b} \delta_{i,\mu}(t) \right), \quad (192)$$

ここで、 $\delta_{i,\mu}(t)$ は個体 i の μ 番目のピンが像で占められているときに 1 となり、それ以外ではゼロとなる関数である。また、自身の目から像までの平均距離を

$$d_v(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{\mu=1}^{N_b} \delta_{i,\mu}(t) r_{i,\mu}(t)}{\sum_{\mu=1}^{N_b} \delta_{i,\mu}(t)} \right) \quad (193)$$

とする。ここで、 $r_{i,\mu}$ は μ 番目のピンの像の鉛直角直径から測定される像までの距離 (式 (166)) である。加えて、像との最短距離

$$d_{\min}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min_{\mu=1, \dots, N_b} r_{i,\mu}(t). \quad (194)$$

も測定する。前節までと同様に、これらの量の平均値を p_v , d_v , d_{\min} と書く。

図 117(a) に示すように (iii) swarm, (i) vortex, (ii) polarized school/(iv) turning の順で、 p_v はより大きく、 d_v と d_{\min} はより小さくなる。特に、像までの平均距離 d_v は (i) では $r_e = 2$, (ii)/(iv) では $\rho_e = 1$ といった力の平衡距離に近い値を取ることがわかる。これより、視野の内、像に遮蔽されていない割合は $1 - p_v \sim 0.2-0.3$ となるが、これは 70-151 匹のゴールデンシャイナーによる測定値 $\sim 0.2-0.4$ [198] とよく一致する。

10.4.2 遮蔽効果とトポロジカル距離の関係

さらに、相手個体による遮蔽の効果を詳しく調べるため、全ての個体が視野中に占める角度領域の内、 n 次近接 (n NN) の相手個体が占める角度の割合として相対占有率 p_n を次のように定義する： μ 番目のピンが n NN の像によって占められている場合に $\delta_{i,\mu}^{(n)} = 1$, それ以外では $\delta_{i,\mu}^{(n)} = 0$ となるような関数を用いて

$$p_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{\mu=1}^{N_b} \delta_{i,\mu}^{(n)}(t)}{\sum_{\mu=1}^{N_b} \delta_{i,\mu}(t)} \right), \quad (195)$$

となる。ここで n をトポロジカル距離と呼ぶ。時間平均は $t \in [300, 1300]$ とした。図 117(b) に示すように、定常パターン (i),(ii), (iii) では、 p_n は $n = 99$ までほとんどゼロに減少する。これは、一度に全ての個体を視覚的に捉えることは不可能であることを意味している。

100 個体が人工的にランダムな配置をとった場合と比較する。時間発展のシミュレーションの初期条件と同じく、個体は半径 7 の円形領域にランダムに配置され、その向き (方

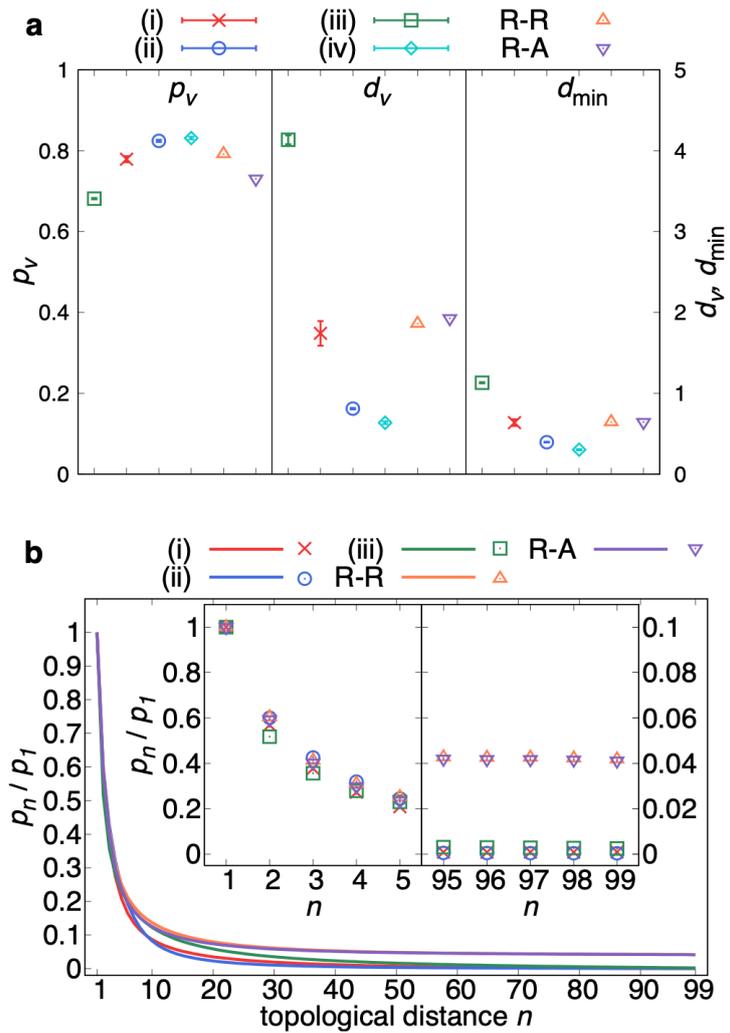


図 117: (i) vortex (赤) (ii) polarized school (青), (iii) swarm (緑), and (iv) turning cluster (水色) における視覚情報. R-R (オレンジ) と R-A (紫) は、それぞれランダムーランダムとランダムー一整理 (本文参照) を表す. (a) 相手個体の占有率 p_v , 平均距離 d_v , 最短距離 d_{\min} . エラーバーは標準偏差を表す. (b) p_1 で規格化された相対占有率 p_n/p_1 . インセットは $n \in [0, 5]$ と $n \in [95, 99]$ のトポロジカル距離での拡大図である.

位角) はランダムな場合 (ランダムーランダム) と揃っている場合 (ランダムー一整理) の 2 パターンを用意した. これらのパターンとの比較した結果を図 117(b) に示す. 人工的なランダム配置の場合は n を大きくしても p_n はゼロに近づかず, 一定の非ゼロの値に近づく. 特に, (iii) swarm の方が人工的ランダム配置よりも p_v は小さく, d_v , d_{\min} が大きい (図 117(a) 参照), 群れは希薄で視覚の遮蔽は起きにくいように思われるが, 実際には, すべての個体を視認することができないという結果を得た. これは, 群れが希薄にも関わらず, 引力や配向相互作用などによって, 局所的に各個体の周りに相手個体が集まり, 人工的なパターンよりも視覚を遮蔽しているためと考えられる.

図 118(a) は, 図 117(b) を両対数グラフで表したもので, $n \lesssim 10$ の距離では p_n は直線的に振る舞うため, p_n は n のべき乗に従うと言える. 一方で, 図 118(b) の片対数グラフ

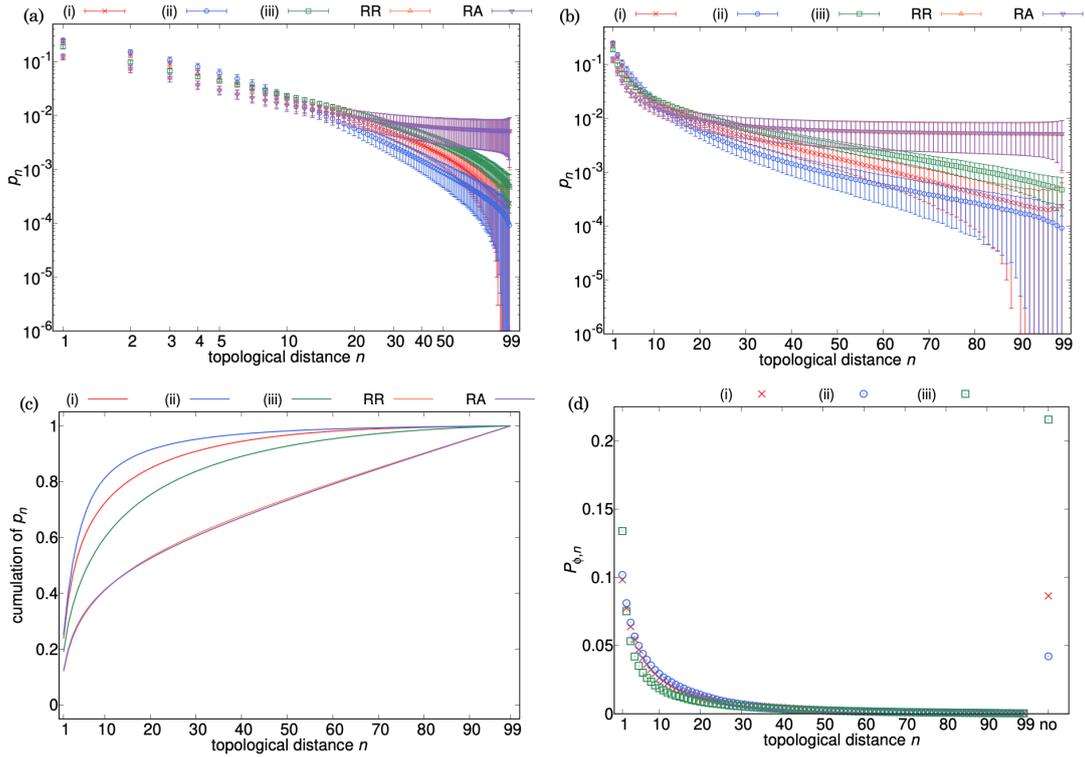


図 118: 100 個体のクラスターにおける視覚情報. 色と集団パターンの対応は図 117 と同じである. 相対占有率 p_n の (a) 両対数グラフ (b) 片対数グラフ. (c) 累積占有率 $\sum_{m=1}^n p_m$. (d) n NN に視線が向く確率 $P_{\phi,n}$. 横軸中の “no” はどの相手個体にも視線が向いていない状態に対応する.

で示すように, 大きなトポロジカル距離 ($n \gtrsim 30$) では p_n は n に対して指数関数的に振る舞う. また, 図 118(c) に累積占有率 $\sum_{m=1}^n p_m$ を示す. n を大きくすると, 累積占有率は (i)-(iii) の定常クラスターでは急速に 1 に収束するが, 人工的ランダムパターンではゆっくり 1 に近づく. これからも, 定常クラスターでは, ランダムパターンに比べて遮蔽効果が強いことが示される.

加えて, 相手個体 n NN に視線を向けている確率 $P_{\phi,n}$, すなわち視線の角度 ϕ が n NN の像に占められたビンに存在する確率を, 時間窓 $t \in [300, 1300]$ において計算した. $P_{\phi,n} = 1$ の場合, 視線は n NN のみに向けられていることを意味する. 図 118(d) に示すように, 確率 $P_{\phi,n}$ は n の関数として著しく減少しゼロへ向かう. また, どの相手にも視線を向けていない確率 $P_{\phi,\text{no}} = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} P_{\phi,n}$ を定義すると, swarm の $P_{\phi,\text{no}}$ は vortex と polarized school の $P_{\phi,\text{no}}$ や swarm の $P_{\phi,1}$ よりも大きく, 各個体から見てより希薄なクラスターであると言える.

10.4.3 相互作用とトポロジカル距離の関係

最後に, トポロジカル距離 n の個体 (n NN) がもたらす相互作用への寄与について考える. n NN に視線が向いている瞬間の力の大きさを F_n , 角速度の大きさを Ω_n とし, これらの期待値をそれぞれ $\langle F_n \rangle = F_n P_{\phi,n}$, $\langle \Omega_n \rangle = \Omega_n P_{\phi,n}$ とする. (F , Ω の定義は

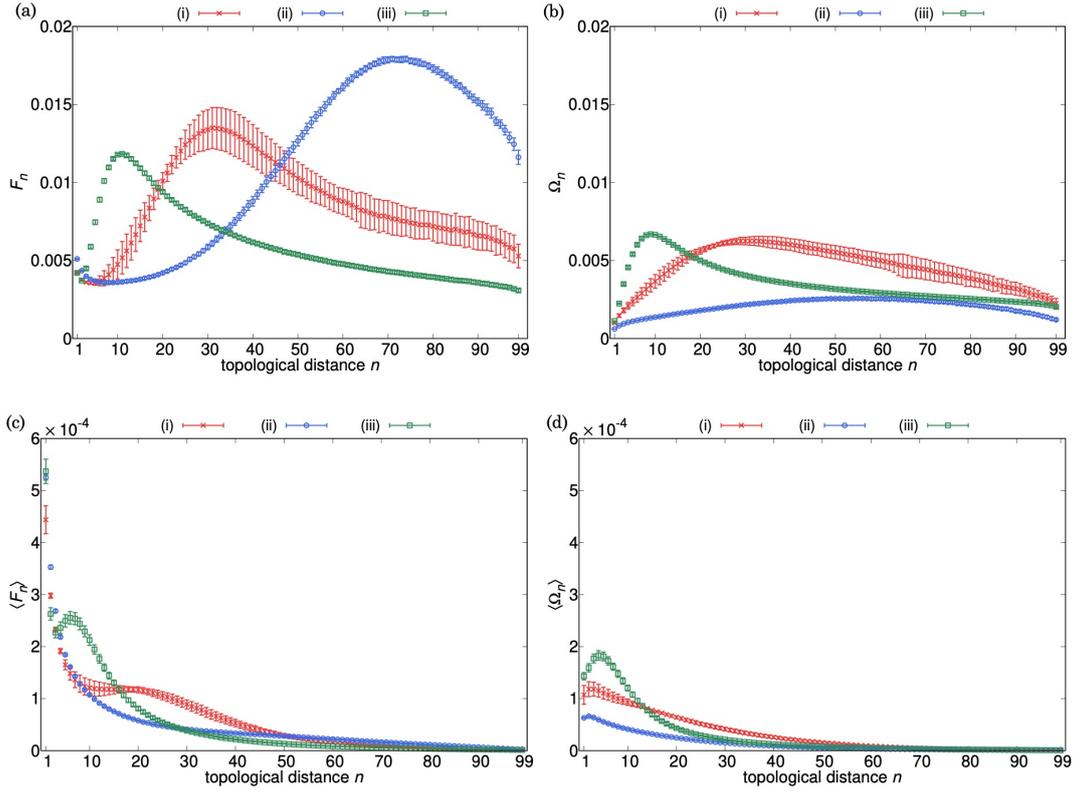


図 119: 相互作用のトポロジカル距離 n に対する依存性. n 次近接個体による (a) 力 F_n , (b) 加速度 Ω_n , (c) $\langle F_n \rangle$, (d) $\langle \Omega_n \rangle$ をそれぞれ示す. 色と集団パターンの対応は (i) vortex (赤) (ii) polarized school (青), (iii) swarm (緑) である.

式 (172), (174) を参照.) $F_n, \Omega_n, \langle F_n \rangle, \langle \Omega_n \rangle$ は $t \in [300, 800]$ の時間窓で測定し, 25 回のシミュレーションの内, 分裂の起こらなかった場合のものについて平均化した.

図 119(a) に測定結果を示す. F_n は小さい n の近傍の個体に対して斥力となり, 大きい n の遠くの個体に対しては引力となるが, 引力のピークは (iii) swarm, (i) vortex, (ii) polarized school の順に大きな n へとシフトしていく. これは, 個体間距離 d_v (図 117(a)) が (iii) swarm, (i) vortex, (ii) polarized school の順に小さくなることから説明がつく. 一方, 図 119(c) に示すように, 期待値 $\langle F_n \rangle$ は斥力領域からの寄与がほとんどとなる. これは, 遠くの個体から受ける引力の寄与はクラスター内での視覚遮蔽により小さくなり, 常に視認できる近くの相手個体からの斥力が時間的に大きな割合を占めるためである. 特に, 1 次近接個体からの斥力の寄与が顕著である. これはカダヤシ (mosquitofish) [77] では 1 次近接の斥力が支配的であるという結果と一致する. また, 第 5 章で導入した回転魚群のモデル [137] において, 群れの中では引力が消失する観測結果を現象論的に用いたが, 本節の結果は, 視覚遮蔽に起因して引力の消失が生じることを示したものである. 角速度 Ω_n の測定結果は図 119(b) に示す. 引力が主な寄与となり, その期待値 $\langle \Omega_n \rangle$ も中程度のトポロジカル距離までは概ね一定となる (図 119(d)).

10.5 2体相互作用と3体相互作用の力の分布

2個体, 3個体の場合の相互作用による力の分布を示す. パラメタとして, 群れの場合に (i) vortex が現れる $(\chi, \omega_o) = (0.3, 1.0)$ を採用する.

10.5.1 力の分布の測定方法

まず, 力の分布の測定方法について示す. 初期条件として, 2個体, 3個体が半径7の円形領域にランダムに配置され, 速さ $v_i = v_0$ およびランダムな視線の方向を持つように設定する. シミュレーション時間は $t \in [0, 50]$ とする. 図 120(a) に示すように, 相手個体の相対位置は前後位置, 左右位置の成分に分けられ, 力も運動方向の成分とそれに垂直な成分に分けられる. 個体の数密度分布については, シミュレーション中に相手個体が各空間ビンに見出される回数を規格化して得た. 運動方向の力は運動方向の加速度 (質量は1に規格化しているので, 加速度は力と同じ次元である)

$$\frac{\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \cdot \mathbf{e}_i(t - \Delta t) \quad (196)$$

として定義, 測定し, 旋回力は運動方向と垂直な方向の加速度成分

$$\frac{\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \cdot R_{-\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_i(t - \Delta t), \quad R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (197)$$

として得た (図 120(a) 参照).

10.5.2 2個体の場合の分布

2個体 (相手個体が1個体) の場合の結果を図 120 に示す. 図 120(b) に示すように, 数密度分布は前後にピークを持ち, 前方のピークの方が後方のピークよりも高い. これは相手個体が後方にいる場合, 後方に引き付けられる引力のため, 自身の向きが回転し, 分布の裾野がより広くなるためであると考えられる.

運動方向の力の分布は, 前方では負の加速度が斥力, 正の加速度が引力に対応し, 後方では正の加速度が斥力, 負の加速度が引力に対応する. 図 120(c) に示すように, 左前方, 右前方, 中央後方で強い引力が生じていることが示された. 力の前後非対称性は自己駆動力に起因する. 実際, 図 120(d) に示すように, 自己駆動力を差し引いた分布は前後対称となり, 力 (式 (172)) を前後対称とした結果である. 相対速度依存性については, 図 120(e) に示すように, 相対速度が増加すると引力が増加する傾向が見られる. また, 図 120(f) に示すように, 運動方向の相対角度が増加すると, 後方への引力が増加する. 前方への引力は $[-90^\circ, 90^\circ]$ の範囲でのみ強く, $[-180^\circ, -90^\circ]$ と $[90^\circ, 180^\circ]$ の範囲では力の符号が反転している. これは, $[-180^\circ, -90^\circ]$ と $[90^\circ, 180^\circ]$ の範囲では相手が接近してくるので, 斥力を受けるためと考えられる.

旋回力は, 図 120(g) に示すように, 左右前方方向で強くなるが, これは式 (178) による配向相互作用が前方で強くなることに起因する. さらに, 図 120(h) より, 運動方向の力と同様に, 旋回力も相対速度の増加に応じて大きくなることが示される. これは, 速く動く相手個体を注視しやすい性質により, 相互作用が働いている時間が長くなり, 加速を受け

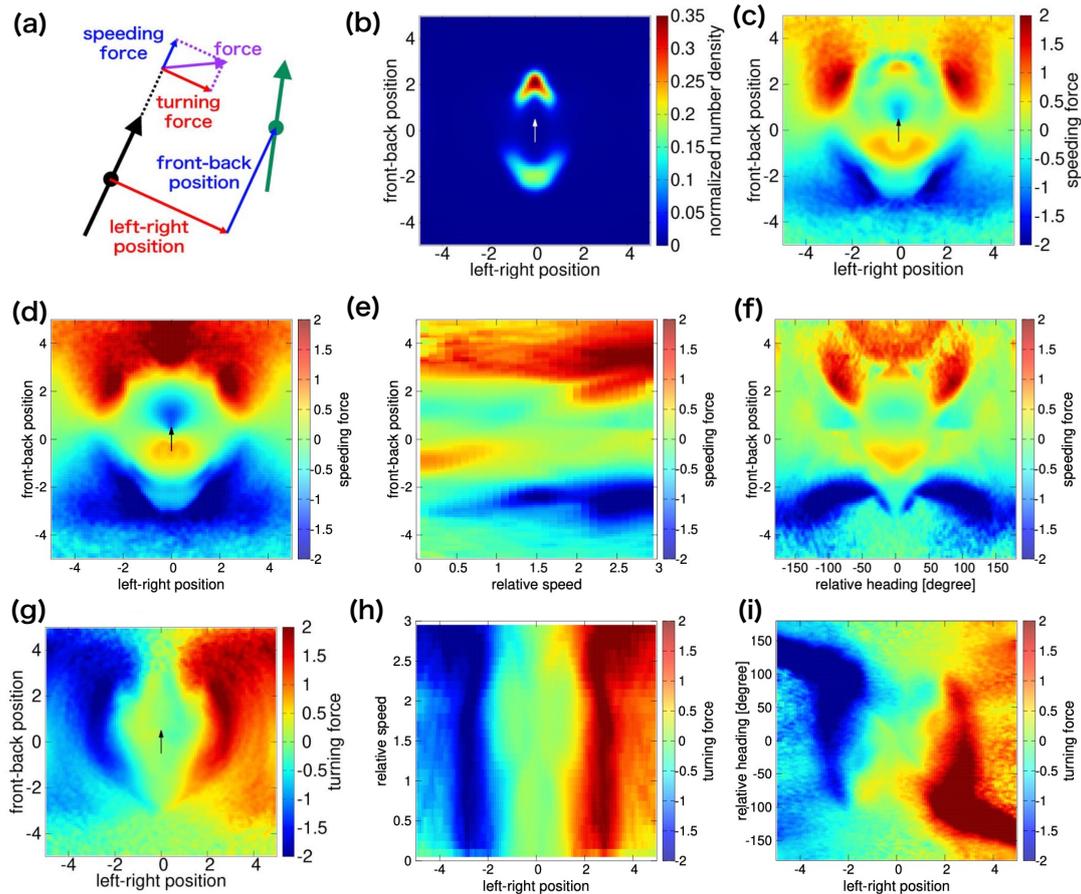


図 120: 2 体相互作用に関する空間分布. (a) 相手個体 (緑の個体) の相対位置と自身 (黒の個体) に生じる力の定義. (b) 相手個体の数密度分布. (c) 運動方向の力の分布. (d) 自己駆動力を差し引いた運動方向の力の分布. (e) 運動方向の力の相対速さ依存性. (f) 運動方向の力の運動方向の相対角度依存性. (g) 旋回力の分布. (h) 旋回力の相対速さ依存性. (i) 旋回力の運動方向の相対角度依存性. (b),(c),(d),(g) の中心の黒や白の矢印は力を受ける個体自身を表す.

やすいためと考えられる. この速度依存性はゴールデンシャイナーの実験結果 [76] とともに定性的に一致する. 相対角度に対する依存性については, 図 120(i) に示すように, 相手個体が遠ざかる向きにある場合に旋回力が大きくなる. すなわち, 相手個体が左側にいる場合は正の相対角度, 右側にいる場合は負の相対角度に対して旋回力が大きくなる.

10.5.3 3 個体の場合の分布

最後に, 3 個体 (相手個体が 2 個体) の場合の結果について示す. 図 121(a) のように, 数密度の分布は, 2 個体の場合と同様に, 後方よりも前方に大きなピークが生じる. ただし, 後方では対角位置に 2 つのピークが生じる点は異なっている. このピークの出現位置は, ゴールデンシャイナーでの数密度分布と一致する [76].

これを別の観点で見るために, 2 つの相手個体の位置を区別して, 図 121(b),(c) のように相手個体 1 と相手個体 2 の前後位置, 左右位置を定義し, これらの関数として分布を測定

した。このとき、図 121(d) に示すように、2つの相手個体の前後位置に対して、数密度分布は星状のパターンをとった。このパターンの出現は、各2個体間の距離を一定に保って、3個体が前後に並んだ状態を好むことを意味する。実際、この数密度のピーク位置付近では、運動方向の力はほとんど消失しており、平衡位置に存在する(図 121(e))。また、このような星状パターンはゴールデンシャイナーでの実験でも観測されている [76]。3体力を明示的に求めるために、2体相互作用を平均した分布との差分を考える。ここで、2体相互作用を平均した力は、運動方向の力と旋回力それぞれについて $0.5 \times (F_1^{\text{pairwise}} + F_2^{\text{pairwise}})$ と計算される。 F_1^{pairwise} と F_2^{pairwise} は相手個体 1 と相手個体 2 からの相互作用による力で、平均した力は2つの相手個体と独立に2体相互作用をしたと仮定した場合の力に相当する。従って、3個体での分布との差分を取ることで、3体力が求められる。2体相互作用を平均した力は図 121(f) のようになり、3体力は図 121(g) のようになる。2つの相手個体が両方とも前、または後ろにいるときの斥力が強くなること、及び、2つの相手個体がそれぞれ前と後にいる際に、その間にとどめようとする復元力が働くことがわかる。このような復元力に相当する3体力はゴールデンシャイナーの実験でも報告されている [76]。

2つの相手個体の左右位置に対しては、図 121(h) に示すように、数密度分布は比較的狭い範囲に集中し、ピークは分布図の中心、すなわち、相手個体との左右距離がゼロに近い

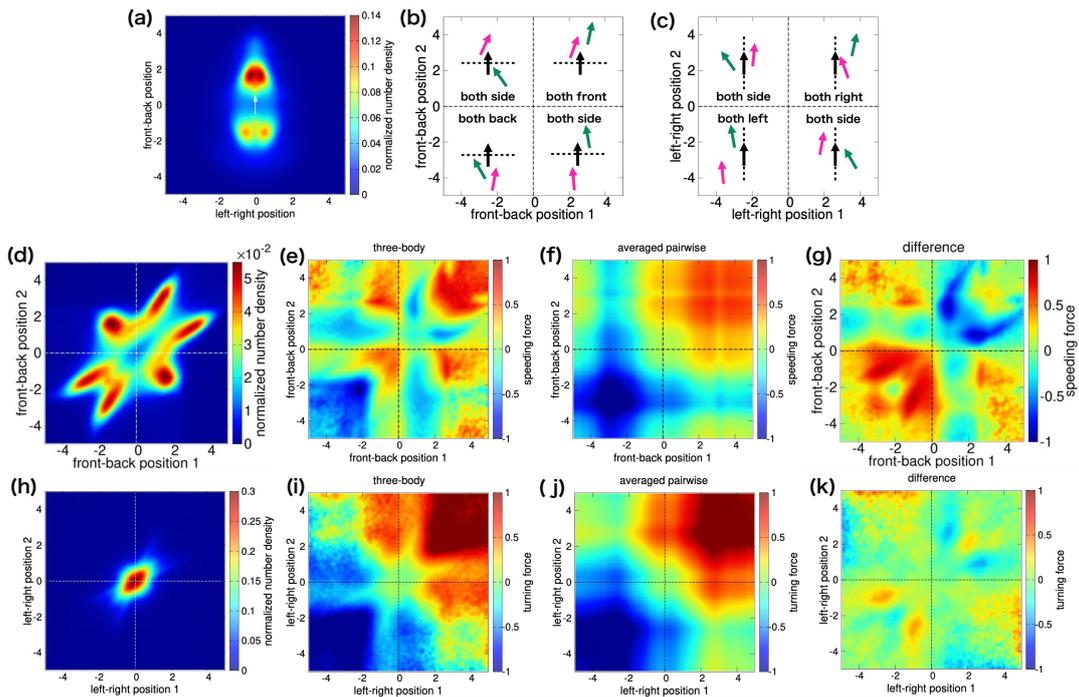


図 121: 3体相互作用に関する空間分布。(a) 数密度分布。中心の白の矢印は自身の個体に対応する。(b),(c) 自身(黒の個体)に対する相手個体(緑とピンクの個体)の前後位置、左右位置の関数の模式図。2つの相手個体の前後位置に対する(d) 数密度分布、(e) 運動方向の力、(f) 2体相互作用を平均した運動方向の力、(g)(e) と (f) の力の差分。2つの相手個体の左右位置に対する(h) 数密度分布、(i) 旋回力、(j) 2体相互作用を平均した旋回力、(k)(i) と (j) の力の差分。

位置をとっていることを示している。従って、前後距離の数密度分布 (図 121(d)) と合わせて考えると、前後距離 $2 BL$ 程度を保ちながら、直線的な配置をとっていることを意味する。一方で、ゴールデンシャイナーの実験では、左右距離の数密度分布も星状パターンをとっており、直線ではなく、斜めに並んだ配置を好むことがわかっている [76]。また、図 121(i)(j) はそれぞれ旋回力についての 3 体相互作用と、2 体相互作用による平均した力を示しており、その差分は運動方向の力に比べると比較的小さい (図 121(k))。

11 ボルツマン方程式による先行モデル

1.8.1 節で述べたように、自己駆動粒子のモデル、特に Vicsek 型のモデルをボルツマン方程式で記述する理論体系がある。次章で視覚相互作用に対するボルツマン方程式の構築を示す前に、本章では Vicsek 型のモデルに対するボルツマン方程式に触れる [29–31, 199–201].

11.1 ボルツマン方程式の導入

ボルツマン方程式を導入する一つの利点は、相転移などの性質が解析的に扱いやすくなることにある。この方程式は個体の位置や速度の分布関数の時間発展を記述するものであり、相互作用としては2体衝突による配向相互作用が導入されている [29, 199–201].

まず、2次元の系において、各個体の位置を $\mathbf{r} = (x, y)$ 、運動の向きを表す単位ベクトルを $\mathbf{e}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ と書く。Vicsek モデルと同じく推進速度は v_0 とする。このとき、ボルツマン方程式は分布関数 $f(\mathbf{r}, \theta, t)$ を用いて

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla f = I_{\text{self}}[f] + I_{\text{col}}[f] \quad (198)$$

と書かれる。確率分布の移流を含む時間発展を表し、右辺の第1項、第2項はそれぞれ、自己拡散による方向転換および配向相互作用の効果を表す。ここで、分布関数の角度積分は数密度

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\mathbf{r}, \theta, t) \quad (199)$$

を与え、速度の期待値は

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta v_0 \mathbf{e}(\theta) f(\mathbf{r}, \theta, t) \quad (200)$$

となる。式 (198) を角度について積分すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (I_{\text{self}}[f] + I_{\text{col}}[f]) \quad (201)$$

となるため、連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (202)$$

を満たすために、 $I_{\text{self}}[f] + I_{\text{col}}[f]$ の角度積分はゼロになることが要請される。

11.1.1 自己拡散項

$I_{\text{self}}[f]$ は自己拡散による運動の向きの変化を表す項であり、

$$I_{\text{self}}[f] = -sf(\mathbf{r}, \theta, t) + s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' p(\theta - \theta') f(\mathbf{r}, \theta', t) \quad (203)$$

の形で与えられる。ここで s は自己拡散による方向転換が生じる単位時間あたりの確率であり、Vicsek モデルのタイムステップの逆数に対応する。 $p(\theta)$ は1回の方向転換における

角度の変化量の確率分布であり, wrapped Gauss 分布や von Mises 分布のような周期関数
が用いられる. 式 (203) の右辺第 1 項 (流出項) は, 位置 \mathbf{r} にいる個体が角度 θ から他の角
度へ, 自己拡散により遷移する割合を表す. 一方で, 第 2 項 (流入項) は個体が角度 θ' から
 θ へ, 確率分布 $p(\theta - \theta')$ に従い遷移する割合を表す. ちなみに, $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta I_{\text{self}}[f] = 0$ となる
ので, 自己拡散による角度の流出・流入は全体ではゼロになっていることが確かめられる.

11.1.2 2 体衝突項

次に, $I_{\text{col}}[f]$ は局所的な 2 体衝突による配向相互作用を表す項である. 各個体は配向相
互作用の円形領域を備えているとし, その半径を d_0 とする. 位置 \mathbf{r} において, $\mathbf{e}(\theta)$ の方
向に進む個体と $\mathbf{e}(\theta')$ の方向に進む個体との相互作用 (衝突) を考える. $\mathbf{e}(\theta)$ の方向に進む
個体が, $\mathbf{e}(\theta')$ の方向に進む個体に対して単位時間あたりに掃く相互作用領域の断面積は
 $2d_0 \times v_0 |\mathbf{e}(\theta) - \mathbf{e}(\theta')|$ である. 従って, $\mathbf{e}(\theta)$ の方向に進む個体の単位時間あたりの衝突確
率は $2d_0 v_0 |\mathbf{e}(\theta) - \mathbf{e}(\theta')| f(\mathbf{r}, \theta')$ である. よって, $I_{\text{col}}[f]$ の表式は

$$I_{\text{col}}[f] = - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' 2d_0 v_0 |\mathbf{e}(\theta) - \mathbf{e}(\theta')| f(\mathbf{r}, \theta, t) f(\mathbf{r}, \theta', t) \quad (204)$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 2d_0 v_0 |\mathbf{e}(\theta_1) - \mathbf{e}(\theta_2)| f(\mathbf{r}, \theta_1, t) f(\mathbf{r}, \theta_2, t) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2))$$

である. 右辺第 1 項 (流出項) は, 衝突により角度 θ の個体が他の角度へ遷移する割
合を表す. 一方で, 第 2 項 (流入項) は, 角度 θ_1 と角度 θ_2 の個体の衝突によりどち
らかが角度 θ に遷移する割合を表す. 配向相互作用では角度 θ_1 と角度 θ_2 の個体が角度
 $\vartheta(\theta_1, \theta_2) = \arg(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$ に変化する. これは θ_1 と θ_2 の間の中心の角度に対応する.
また, $\hat{p}(\theta)$ は方向転換の確率分布であり, 配向相互作用にノイズが加わることを表現する.

11.1.3 ボルツマン方程式の適用条件

方程式 (198) の適用条件について述べる. ボルツマン方程式を導入する前提条件として,
密度が希薄なために 2 体衝突のみが起こり, 三体以上が同時に衝突する状況は起こらない
仮定が置かれる. このモデルの場合, 基準密度 ρ_0 (分布関数が一様状態になった場合の一
様密度) に対して, 個体間の平均的な距離は $1/\sqrt{\rho_0}$ であり, この距離が相互作用の特徴的
な長さ d_0 より十分大きければ良いので, $\sqrt{\rho_0} d_0 \ll 1$ が適用条件となる.

この希薄条件のために, 相互作用領域に複数の相手個体が存在することはほとんどなく,
相互作用距離 d_0 を考慮した非局所な相互作用を考える必要はなくなる. そのため, 相互作
用距離 d_0 は散乱弾面積として遷移確率に取り込まれ, 実質的に位置 \mathbf{r} での局所 2 体衝突
として扱うことができる.

11.2 ボルツマン方程式の線形安定性解析

方程式 (198) に線形安定性解析を施すことで, 流体方程式や秩序の発生の転移密度を導
出することができる. 先行研究により得られた流体方程式のみを記し, その導出過程であ
る線形安定性解析の詳細は本研究でのモデルで用いた手法と重なる部分も多いため省く.
ボルツマン方程式から得られた流体方程式は, 速度の期待値 \mathbf{w} を巨視的な流体の速度とみ

なして

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \gamma(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = & (\mu - \xi \mathbf{w}^2) \mathbf{w} - \frac{v_0^2}{2} \nabla \rho + \frac{\kappa}{2} \nabla \mathbf{w}^2 + \nu \Delta \mathbf{w} \\ & - \kappa(\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} + \lambda \nabla \rho \cdot (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T) - \lambda(\nabla \cdot \mathbf{w}) \nabla \rho \end{aligned} \quad (205)$$

となる。 $\gamma, \mu, \xi, \kappa, \nu, \lambda$ は定数であるが、特に後ほど重要となる μ については

$$\mu = \frac{8}{\pi} \rho_0 d_0 v_0 \left(2\pi \hat{p}_1 - \frac{2}{3} \right) - s(1 - 2\pi p_1) \quad (206)$$

と書かれる。 p_1 と \hat{p}_1 はそれぞれ確率分布 $p(\theta)$ と $\hat{p}(\theta)$ の 1 モードのフーリエ成分である。

これより、一様な定常状態からの秩序の発生を考える。 ρ, \mathbf{w} の空間微分、時間微分はゼロになるため、式 (205) は

$$(\mu - \xi \mathbf{w}^2) \mathbf{w} = 0 \quad (207)$$

となる。無秩序状態を表す $\mathbf{w} = 0$ の一様な自明解以外に解が現れるのは、 ξ は正の定数であることを考慮すると、 $\mu > 0$ の場合である。すなわち、速度の期待値が $w = \sqrt{\mu/\xi}$ という大きさを持つことから、これは配向秩序が発生した状況に対応する。 μ は密度 ρ_0 の増加関数であるため、密度が大きくなるほど配向秩序も大きくなるという結果が得られる。また、条件 $\mu = 0$ が秩序発生の転移点を導く方程式となり、それを解くことで転移密度

$$\rho_{0,\text{tr}} = \frac{\pi s}{8d_0 v_0} \frac{1 - 2\pi p_1}{2\pi \hat{p}_1 - \frac{2}{3}} \quad (208)$$

を得る。

12 視覚相互作用のボルツマンアプローチによる定式化

この章の結果は本研究に関する著者らの論文 [202] に基づく。(S. Ito and N. Uchida, Boltzmann approach to collective motion via nonlocal visual interaction, *Phys. Rev. E* **111**, 044411 (2025). doi:10.1103/PhysRevE.111.044411 より許可を得て図表を転載。)

この章では、視覚を介した相互作用を行う集団に対するボルツマン方程式を導出し、視覚相互作用の解析的な性質を研究する。最近の実験 [112] により、魚は相手個体を逐次的に 1 個体ずつ選択して相互作用することが示唆された。これにより、ボルツマン方程式の前提条件である 2 体相互作用の仮定が視覚相互作用の範疇にまで拡張可能であろうという動機から本研究は進められた。本研究では、手前の個体が後方の個体を視覚的に遮蔽すること (遮蔽効果) は本質的に多体相互作用だが、これを近似的に 2 体相互作用として扱う手法を確立する。

12.1 モデルの導出

本モデルでは、2 次元の系を扱う。各個体の位置を $\mathbf{r} = (x, y)$, 運動の向きを表す単位ベクトルを $\mathbf{e}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とし、推進の速さは v_0 で一定とする。視覚情報を扱うために、個体には大きさを設け、直径 D の円形個体と定める (図 122)。ボルツマン方程式の構成は、先行モデルの式 (198)2 体衝突の項 I_{col} が、視覚相互作用由来の項に変更されることを除いて同様である：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla f = I_{\text{self}}[f] + I_{\text{vis}}[f] \quad (209)$$

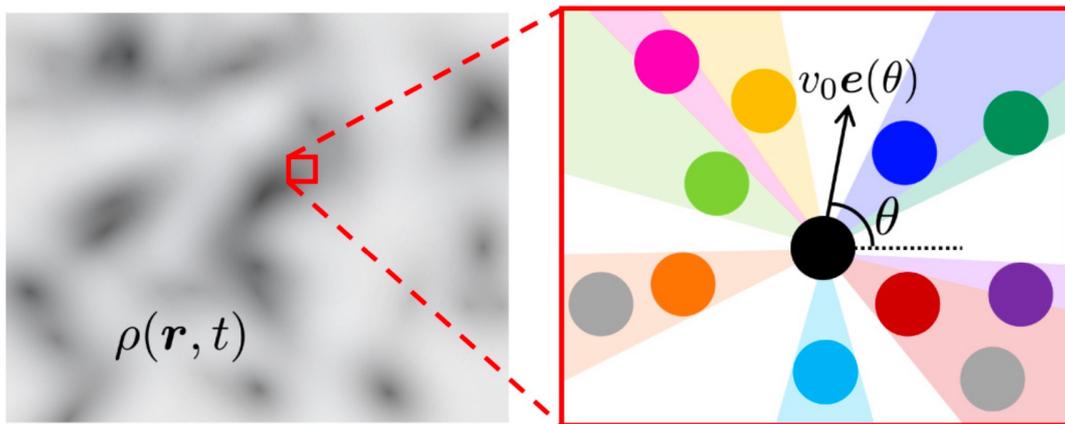


図 122: 本モデルの模式図。左図では連続体表示により、個体の雲が密度場 $\rho(\mathbf{r}, t)$ として表示され、右図はその一部を拡大した様子である。各個体は直径 D の円形個体で、速度 $v_0 \mathbf{e}(\theta)$ で運動する。中心の個体は視認できる相手個体のうち 1 個体を逐次的に選択し配向相互作用をする。灰色の個体は視覚遮蔽の効果により中心の個体からは視認できない個体を示す。

$$I_{\text{self}}[f] = -sf(\mathbf{r}, \theta, t) + s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' p(\theta - \theta') f(\mathbf{r}, \theta', t) \quad (210)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{vis}}[f] = & -c \int d^2\mathbf{r}' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \Gamma(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \theta' - \theta) \\ & \times f(\mathbf{r}, \theta, t) f(\mathbf{r}', \theta', t) \\ & + c \int d^2\mathbf{r}' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \Gamma(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \theta_2 - \theta_1) \\ & \times f(\mathbf{r}, \theta_1, t) f(\mathbf{r}', \theta_2, t) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \end{aligned} \quad (211)$$

となる。

自己拡散項 I_{self} は先行モデルと同じものだが、具体的な計算を進めるために方向転換の確率分布には von Mises 分布 $p(\theta) = e^{\kappa \cos \theta} / (2\pi I_0(\kappa))$ を用いる。ここで κ は分布の鋭さのパラメタ、 $I_{n=0,1,\dots}(\kappa)$ は第 1 種変形ベッセル関数 (式 (155)) である。ただし後に示すように、本モデルによる解析結果の定性的な性質は確率分布の関数形には依存しない。

続いて、視覚相互作用の項 I_{vis} について述べる。2 体衝突項 I_{col} と大きく異なる点は空間積分が含まれていることである。位置 \mathbf{r} にいる個体が、位置 \mathbf{r}' にいる相手個体を視認し、視覚を介した配向相互作用を行うため、空間積分を用いる。式 (211) の右辺第 1 項 (流出項) は、位置と角度を (\mathbf{r}, θ) に持つ個体が (\mathbf{r}', θ') の相手個体を視認し、角度 θ から他の角度に遷移する割合を表す。一方で、第 2 項は (\mathbf{r}, θ_1) の個体が (\mathbf{r}', θ_2) の相手個体を視認し、角度 $\vartheta(\theta_1, \theta_2) = \arg(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$ に遷移する割合を表す。ただし $\hat{p}(\theta) = e^{\hat{\kappa} \cos \theta} / (2\pi I_0(\hat{\kappa}))$ は方向転換の確率分布であり、von Mises 分布を用いる。これらの単位時間あたりの遷移確率は c 、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ 、 $\Gamma(|\mathbf{R}|, \psi)$ に依存している。 c は視認による配向相互作用が生じる単位時間あたりの基準の遷移確率である。視認の確率は以下のような要因により低下する。視覚遮蔽による幾何的な要因で相手個体を視認できなくなることや、相手との距離 $|\mathbf{R}| = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ が大きくなり、視力の問題で視認できなくなること [95]、あるいは、配向相互作用が相手との角度差に依存すること (その角度差を $\psi = \theta' - \theta$ と書く) [78] が考えられる。従って遷移確率の内、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ を視覚の遮蔽効果を担う関数、 $\Gamma(|\mathbf{R}|, \psi)$ を魚の内在的性質に由来する関数と定義する。以下ではこれらの関数の導出を行う。

12.1.1 遮蔽効果因子

遮蔽効果因子 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ の導出を行う。3.4.1 で述べたように、視力の分解能には神経節細胞の数に依存する限界が存在するため [95]、その分解能角度を Φ とする (図 123)。相

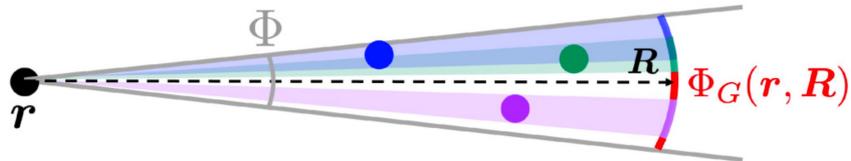


図 123: $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ の模式図。位置 \mathbf{r} の黒の個体が、視線を相対位置 \mathbf{R} の方向に向けている。このとき、分解能角度 Φ の内、青、緑、紫の個体によって遮蔽されなかった総計の角度が $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ となる。

対位置の単位ベクトル $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ を向く視線の周りに角度分解能の幅を持った角度領域を設け、その内側では各相手個体を判別することができないとする。このとき、角度幅 $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ を分解能角度 Φ の内、距離 R までにいる相手個体の像に占められていない角度領域と定める (図 123)。遮蔽効果因子 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は位置 \mathbf{r} にいる個体が位置 $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ にいる相手を視認できる確率と定義し、これは占められていない残りの角度幅 $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ の割合となる：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \frac{\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)}{\Phi} \leq 1 \quad (212)$$

従って、距離が大きくなるほど、遮蔽によって残りの角度幅 $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は少なくなるため、遮蔽効果因子 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は距離の減少関数となる。

$\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ を導出するために満たすべき微分方程式を考える。まず、 $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)dR$ を Φ の中で R と $R + dR$ の間の距離にいる個体により占められる角度領域の割合とすると、 $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial R} \Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = -\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \quad (213)$$

の解となる。ここで、割合 $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は位置 $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ での密度と、分解能角度 Φ 内の距離 R にいる個体が占める平均弧長 $\mathcal{D}(R)$ を用いて

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \mathcal{D}(R) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}, t) \quad (214)$$

と定義される。($\mathcal{D}(R)$ の導出は付録 H を参照。) 言い換えると、 $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は 1 個体が占める角度 \mathcal{D}/R とその領域にいる個体数 $\rho R \Phi dR$ の積を Φ で割ったものである。また、ゼロ距離では個体に占められた角度領域はゼロであるため境界条件 $\Phi_G|_{R \rightarrow 0} = \Phi$ を課して、微分方程式 (213) の解 $\Phi_G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ 、および遮蔽効果因子 $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ は以下ようになる。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \exp\left(-\int_0^R dR' \mathcal{D}(R') \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}', t)\right) \quad (215)$$

以上より、本質的に多体効果である遮蔽効果を密度場 ρ を介して、自己無撞着な有効的 2 体相互作用として定式化することができた。

12.1.2 内在効果因子

内在効果因子 $\Gamma(R, \psi)$ について述べる。 $\Gamma(R, \psi)$ は距離 R 依存性と運動方向の角度差 ψ に対する依存性を含み、それらは $\Gamma(R, \psi) = B(R)K(\psi)$ のように積の形で含まれると仮定する。配向相互作用を行うために相手の運動の向きを知る必要があるため、因子 $B(R)$ は向きを視認できる距離を反映する関数である。その視認の確率は距離の減少関数であり

$$B(R) = \exp\left(-\frac{R^2}{2R_0^2}\right) \quad (216)$$

と定義する。 R_0 は相手の向きを視認できる特徴的な距離である。距離依存性はガウス関数を採用したが、これは配向相互作用の力がガウス関数としてフィッティングされることによる [78]。

因子 $K(\psi)$ は相手との角度差に対する嗜好性を表しており、実験データ [78] を元にすれば、

$$K(\psi) = \frac{|\sin \psi| \{1 + a \cos(2\psi)\}}{\sqrt{(2 - 2a + a^2)/4}}, \quad (217)$$

というように ψ に対して 2 モードまでフーリエ展開した形でフィッティングされる。ここで $K(\psi)$ は $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi K^2(\psi) = 1$ となるように規格化されている。本研究では簡単のため最低次近似 ($a = 0$) を採用し

$$K(\psi) = \sqrt{2} |\sin \psi| \quad (218)$$

と定める。ただし後に示すように定性的な結果は $K(\psi)$ の具体的な形には依存しない。

12.1.3 モデルの適用条件

本モデルを適用するための粗視化の条件について述べる。限界分解能角度 Φ の中で相手個体がぼやけて見えるために、個体が粗視化され密度場として扱える条件を記す。平均の密度 ρ_0 に対して、距離 R 、角度 Φ の扇形領域に存在する個体数は $n \sim \rho_0 R^2 \Phi / 2$ と見積もられる。従って、扇形領域内の個体間距離は $R \sim 1/\sqrt{\rho_0 \Phi}$ となるため、像の占める角度は $D/R \sim \sqrt{\rho_0 \Phi} D$ である。この角度が Φ より十分小さければ、角度幅の中で多くの個体が存在するため、粗視化の適用条件は密度の上限 $\rho_0 \ll \Phi/D^2$ として得られる。

この条件を変形すると関係式 $R \gg D/\Phi \sim R_D$ が得られる。1 個体の像により角度幅 Φ が占められる距離 $R_D = D/(2\Phi)$ (付録 H 参照) より個体間距離 R が十分大きいことを意味する。また $1/(\rho_0 D) \gg D/\Phi \gg R$ とも変形できる。 $1/(\rho_0 D)$ は遮蔽効果因子 G (215) の特徴的な減衰長 R_{occ} (G は遠距離では $G \sim e^{-\rho_0 D R} = e^{-R/R_{\text{occ}}}$ と近似される) に等しいため、 $R_{\text{occ}} \gg R$ という条件にもなりうる。従って、遮蔽により Φ が埋め尽くされ始める距離 R_{occ} よりも、個体間距離が十分小さいことを意味している。また $\Phi \ll 1$ を想定しているため、個体の面積分率 $A = \rho_0 \pi (D/2)^2 \ll \Phi$ は 1 より十分小さく、排除体積を考慮する必要はない。

12.1.4 パラメタの設定

モデルで用いるパラメタについて述べる。

- 個体の直径は 1 体長に対応し $D = 1$ BL とする。
- ゼブラフィッシュはおおよそ ~ 2.5 Hz で運動の向きを変えるが、これは尾の運動の振動数に対応する [192]。また、多くの魚種で定常遊泳での尾の振動数は ~ 2 Hz であるため [44, 47]、遊泳中に方向転換が生じる単位時間あたりの確率を $s = 2 \text{ s}^{-1}$ とする。
- 方向転換の確率分布 $p(\theta)$ は von Mises 分布を採用し、その鋭さのパラメタはゼブラフィッシュの実験 [192] より $\kappa = 6$ とする。また $\hat{p}(\theta)$ のパラメタに対しては先行の自己駆動粒子モデル [192] より $\hat{\kappa} = 20$ と定めた。
- ゼブラフィッシュやゴールデンシャイナーの視覚の角度分解能は $1.5\text{--}7^\circ$ [95] であるため、 $\Phi = 7^\circ$ を採用する。
- ラミーノーズテトラの実験より [78]、相手の向きが視認できる距離は ~ 8 BL であるため $R_0 = 10$ BL を採用した。ちなみに密度上限 $\rho_0 = \Phi/D^2$ における個体間距

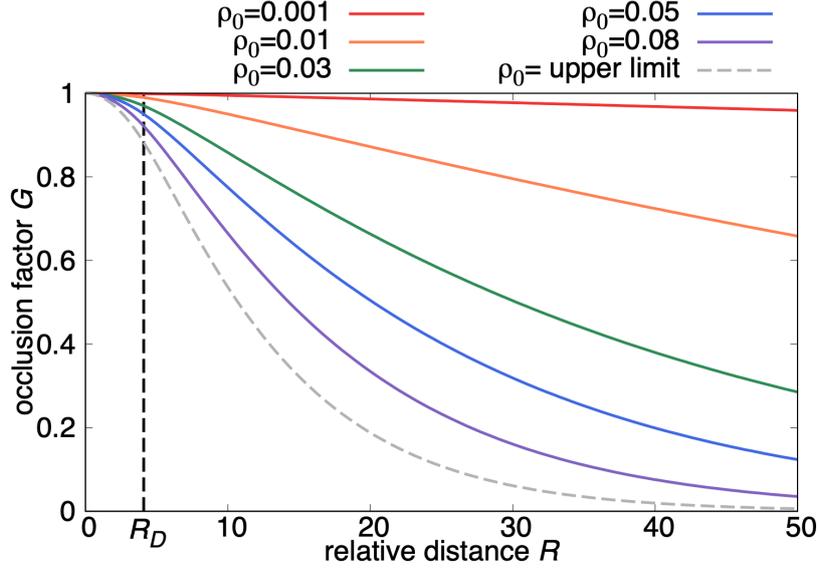


図 124: 一様密度 ρ_0 の場合の遮蔽効果因子 G の距離 R に対する依存性. 実線はそれぞれ $\rho_0 = 0.001, 0.01, 0.03, 0.05, 0.08$ に対する G , 灰色の破線は密度上限 $\rho_0 = \Phi/D^2$ に対する G を示す. 鉛直破線は式 (H.66) での $R = R_D$ を表す.

離は $R \sim D/\Phi \simeq 8.2$ BL と見積もられるため, 配向相互作用が作用する範囲内にあると言える.

本モデルでは 1 BL と 1sec で時空間スケールを規格化する. 上限密度の条件は $\rho_0 \ll 0.12$ となる. 図 124 はこれらパラメタ値に対する遮蔽効果因子 G の関数形を示す.

12.2 線形安定性解析

本モデルのボルツマン方程式 (209) に線形安定性解析を施し, 配向秩序発生による相転移の性質を調べる. 転移点を求めるための関係式を導出することが, 本節での目的である. 線形安定性解析は一様な状態に摂動を加えた際に, 摂動が増大するか, 一様な状態に再び戻っていくかを調べる解析手法である. 分布関数を一様分布 \bar{f}_0 に摂動を加えた

$$f(\mathbf{r}, \theta, t) = \bar{f}_0 + \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) \quad (219)$$

と定義する. 密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 2\pi\bar{f}_0 + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r}, t) \quad (220)$$

となる. このとき遮蔽効果因子は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \simeq \exp\left(-\rho_0 \int_0^R dR' \mathcal{D}(R')\right) \times \left(1 - \int_0^R dR' \mathcal{D}(R') \delta\rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}', t)\right) \quad (221)$$

$$:= G_0(R) \{1 - \delta G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)\}$$

と展開される．よって，ボルツマン方程式は摂動の1次までを採用して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta f(\mathbf{r}, \theta, t)}{\partial t} = & -v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) \\
& -s \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' p(\theta - \theta') \delta f(\mathbf{r}, \theta', t) \\
& -c \mathcal{I} \bar{f}_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' K(\theta' - \theta) \\
& \times \left\{ \bar{f}_0 \left(1 - \frac{\delta \mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}} \right) \right. \\
& + \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta', t) \left. \right\} \\
& + c \mathcal{I} \bar{f}_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \\
& \times \left\{ \bar{f}_0 \left(1 - \frac{\delta \mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}} \right) \right. \\
& + \delta f(\mathbf{r}, \theta_2, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta_2, t) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{222}$$

となる．ここで式の整理のために $K(-\psi) = K(\psi)$ と $\vartheta(\theta_1, \theta_2) = \vartheta(\theta_2, \theta_1)$ の対称性を用い，

$$\mathcal{I} = \int d^2 \mathbf{R} G_0(R) B(R), \quad \delta \mathcal{I}(\mathbf{r}, t) = \int d^2 \mathbf{R} G_0(R) B(R) \delta G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \tag{223}$$

を定義した．

摂動の時間発展を波数モードごとに調べるために，関数 $F(\mathbf{r}, \theta)$ のフーリエ変換を

$$F(\mathbf{r}, \theta) = \int d^2 \mathbf{q} \sum_k F_k(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + k\theta)}, \quad F_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \mathbf{r} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta F(\mathbf{r}, \theta) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + k\theta)} \tag{224}$$

のように定義する． $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ は角度 θ に対する離散的な波数， \mathbf{q} は空間座標 \mathbf{r} に対する連続的な波数ベクトルである．モード (k, \mathbf{q}) の分布関数の摂動に対する減衰率を $\Lambda_k(\mathbf{q})$ を導入し

$$\delta f(\mathbf{r}, \theta, t) = \int d^2 \mathbf{q} \sum_k \delta f_k(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + k\theta)} e^{-\Lambda_k(\mathbf{q})t} := \int d^2 \mathbf{q} \sum_k \delta f_k(\mathbf{q}, t) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + k\theta)} \tag{225}$$

というように分布関数が時間発展すると仮定する．従って， $\Lambda_k(\mathbf{q})$ の実部が正であればモード (k, \mathbf{q}) の摂動は減少するため，そのモードは一様分布の状態が安定ということになり，その逆であれば不安定ということを示している．(添え字のゼロは基本的に $k = 0$ を意味し，例外は \bar{f}_0, ρ_0 ，及びパラメタに限る)．式 (222) の各項をフーリエ展開して，減衰率 $\Lambda_k(\mathbf{q})$ を得る．(計算の詳細は付録 I を参照．) $k = 1$ のモードの減衰率のみが負になることができ，その表式は

$$\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_1) - 4\sqrt{2}c\mathcal{I}\bar{f}_0 \left\{ \frac{2}{3} \times (2\pi \hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) - 1 \right\} \tag{226}$$

となる．この減衰率が正から負に切り替わりゼロになる状況が秩序発生の転移点に対応する． $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ で $\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) = 1$ が最大値をとるため，転移は空間の長波長モードから始まることが

示される。減衰率が負になり得るには $2\pi\hat{p}_1 > 3/4$ であればならず、von Mises 分布であれば尖り度合いのパラメタが十分大きいこと、wrapped ガウス分布であれば標準偏差が十分小さいこと、いずれも分布の裾野が小さいことが要求される。言い換えると、ノイズが大きすぎる場合は減衰率が負にならず、相転移が起こらないことを意味する。(本モデルで用いる $\hat{\kappa} = 20$ では $2\pi\hat{p}_1 = I_1(\hat{\kappa})/I_0(\hat{\kappa}) \simeq 0.97 > 3/4$ を満たす。)

12.3 相転移と転移点の解析

12.3.1 転移点の性質

基準となる相互作用確率 c に対して転移点を求める。式 (226) で $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ の減衰率をゼロとすること ($\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q} = \mathbf{0}) = 0$) で転移点

$$c_{\text{tr}} = \frac{s}{4\sqrt{2}\mathcal{I}f_0} \frac{1 - 2\pi p_1}{\frac{4}{3}(2\pi\hat{p}_1) - 1} := \frac{c_0}{\mathcal{I}f_0} \quad (227)$$

を得る。定数 c_0 は密度に依存しない部分をまとめたものである。 s が増加するか κ や $\hat{\kappa}$ が減少すると、 c_0 は増加する。これはノイズが増大することで秩序相へ転移しにくくなることを意味する。転移点の表式 (227) を密度 ρ_0 の関数として示したものが、図 125 である。 c_{tr} は ρ_0 の減少関数となっており、これは密度が大きいほど多く個体と相互作用し、小さい相互作用確率で秩序相に至ることを意味している。 $\rho_0 \rightarrow 0$ では $\mathcal{I}f_0 \rightarrow \rho_0 R_0^2$ の漸近形より、 $c_{\text{tr}} \propto 1/\rho_0$ のスピードで漸近することが示される。本モデルの適用範囲からは逸脱するが、仮想的に $\rho_0 \rightarrow \infty$ の極限を考えると、 $\mathcal{I}f_0 \rightarrow 1/\Phi$ のため c_{tr} は $c_{\text{tr}} \rightarrow c_0\Phi := c_\infty > 0$ の非ゼロの値を取る。すなわち、多くの個体がいたとしても視覚の遮蔽効果によって視認

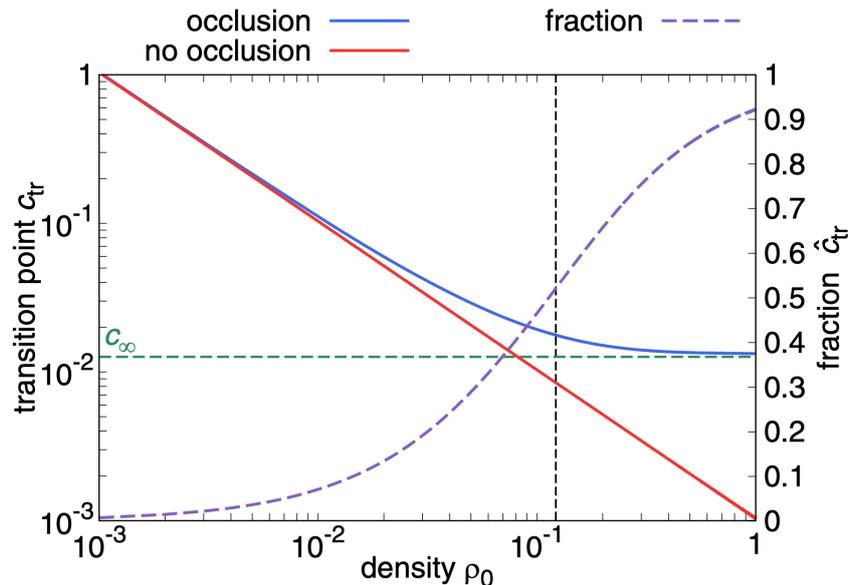


図 125: 転移点 c_{tr} の密度 ρ_0 依存性. 青の実線が式 (227) の c_{tr} であり、高密度極限の緑の破線 c_∞ の値に漸近していく。黒の破線は密度の上限 $\rho_0 = \Phi/D^2 \simeq 0.12$ に対応する。赤の実線は遮蔽が起こらない点粒子極限での転移点 $c_{\text{tr}}|_{D=0}$ を示す。紫の破線は割合 \hat{c}_{tr} を示す (右軸)。

可能な個体数が限られるため、転移点は非ゼロの値を取る。

12.3.2 パラメタの極限での転移点の挙動

転移点の個体の大きさ R_D 依存性、相互作用距離 R_0 依存性を解析する。点粒子極限 $R_D = 0$ ($G = 1$) について考える。この場合、式 (I.82) より $\overline{\mathcal{I}f_0} = \rho_0 R_0^2$ となるため、転移点は $c_{\text{tr}}|_{D=0} = c_0/(\rho_0 R_0^2)$ となる。この表式は $\rho_0 \rightarrow 0$ の希薄極限での転移点に一致し、点粒子極限と希薄極限のどちらでも遮蔽効果が極限的に小さくなるため、同一の表式になる。また、 $c_{\text{tr}}|_{D=0}$ は $\rho_0 \rightarrow \infty$ においてゼロとなるため、個体の大きさがある場合の非ゼロの c_∞ は遮蔽効果によることが確かめられる。図 125 では、点粒子極限の転移点との比 $\hat{c}_{\text{tr}} = (c_{\text{tr}} - c_{\text{tr}}|_{D=0})/c_{\text{tr}}$ も示している。密度上限 $\rho_0 = \Phi/D^2$ までに \hat{c}_{tr} は有意な大きさに発展し、 $\rho_0 \rightarrow \infty$ の極限では $\hat{c}_{\text{tr}} \rightarrow 1$ に収束する。

この結果を浅い水槽 (準 2 次元系) でのティラピア (*O. niloticus* L.) の観測データ [204] と比較する。ティラピアの配向秩序の転移密度は 472 個体/m² であるが、1 体長が 11-15 mm のため、転移密度は $\rho_0 = 0.057-0.106$ 個体/BL² と見積もられる。ただし、魚は細長い体をしているため、遮蔽効果は本モデルの円形個体よりも小さく、円形個体に換算すれば転移密度はより希薄になると考えられる。よって、転移密度は $\rho_0 \in [0.01, 0.1]$ の範囲にあると言える。 $\rho_0 = 0.01$ に対しては割合は $\hat{c}_{\text{tr}} \sim 0.1$ と小さいが、無視できない値をとっている。高密度領域側では割合はより大きくなるが、実験での密度は本モデルでの密度上限 $\rho_0 = \Phi/D^2 \simeq 0.12$ に近いいため、高密度領域側では直接的に実験を当てはめることは難しいかもしれない。

点粒子極限では減衰率 $\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q})$ を明示的に計算することもできる。式 (226) より転移点での減衰率は

$$\begin{aligned} \text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q})|_{D=0} &= s(1 - 2\pi p_1) - 4\sqrt{2}c_{\text{tr}}\overline{\mathcal{I}f_0} \left\{ \frac{2}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + e^{-\frac{q^2 R_0^2}{2}} \right) - 1 \right\} \quad (228) \\ &= 2s \frac{1 - 2\pi p_1}{4 \times (2\pi\hat{p}_1) - 3} \times (2\pi\hat{p}_1) \left(1 - e^{-\frac{q^2 R_0^2}{2}} \right) > 0. \end{aligned}$$

となる。よって、 $q > 0$ に対しては $\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q})|_{D=0}$ は正であるため、任意の空間波数モードの摂動に対して一様分布が安定であることが示される。 $R_0 > 0$ であれば $\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q})|_{D=0}$ が正であることもわかるが、これは少しでも相互作用に非局所性があれば転移点で $q > 0$ の特定の空間モードが不安定化することはないことを意味する。

続いて、相互作用距離 R_0 の極限 $R_0 \rightarrow \infty$ ($B = 1$) を考える。 $\overline{\mathcal{I}f_0}$ に含まれる空間積分 (I.78) が直接計算可能になり、

$$\rho_0 \int_0^{R_D} dR R e^{-\rho_0 \left(\Phi + \frac{1}{\rho_0 R_0^2} \right) \frac{R^2}{2}} \rightarrow \frac{1}{\Phi} \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 \Phi R_D^2}{2}} \right) \quad (229)$$

$$\begin{aligned} &\rho_0 \int_{R_D}^{\infty} dR R e^{-\frac{R^2}{2R_0^2}} e^{-\rho_0 \Phi R_D^2} \left\{ -\frac{3}{2} + 2\frac{R}{R_D} + \ln\left(\frac{R_D}{R}\right) \right\} \quad (230) \\ &\rightarrow \rho_0 R_D^2 \int_1^{\infty} d\xi \xi \left(e^{\frac{3}{2}\xi} \xi e^{-2\xi} \right)^{\rho_0 \Phi R_D^2}, \quad \xi = \frac{R}{R_D} \\ &= \rho_0 R_D^2 e^{\frac{3}{2}\rho_0 \Phi R_D^2} E_{-1-\rho_0 \Phi R_D^2} (2\rho_0 \Phi R_D^2) \end{aligned}$$

となる．ここで $E_a(z) = \int_1^\infty d\xi e^{-z\xi}/\xi^a$ は一般化された指数積分である．従って，

$$\overline{\mathcal{I}f_0} \rightarrow \frac{1}{\Phi} \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 \Phi R_D^2}{2}} \right) + \rho_0 R_D^2 e^{\frac{3}{2} \rho_0 \Phi R_D^2} E_{-1-\rho_0 \Phi R_D^2} (2\rho_0 \Phi R_D^2) \quad (231)$$

を得る． $\overline{\mathcal{I}f_0}$ が有限の値を取るため，転移点 $c_{\text{tr}}|_{R_0 \rightarrow \infty}$ は非ゼロの値をとる．一方で，点粒子極限の転移点 $c_{\text{tr}}|_{D=0} = c_0/(\rho_0 R_0^2)$ は $R_0 \rightarrow \infty$ でゼロになるため， $c_{\text{tr}}|_{R_0 \rightarrow \infty}$ の非ゼロの性質は遮蔽効果によると言える．指数積分は点粒子極限 $R_D \rightarrow 0$ において， $E_{-1-\rho_0 \Phi R_D^2} (2\rho_0 \Phi R_D^2) \rightarrow 1/(2\rho_0 \Phi R_D^2)^2$ の漸近形を取るため， $\overline{\mathcal{I}f_0}|_{D=0} \rightarrow \infty$ ， $c_{\text{tr}}|_{R_0 \rightarrow \infty, D=0} \rightarrow 0$ となる．よって，相互作用距離が無限であったとしても，視覚遮蔽により相互作用の強さは非ゼロの値を持っていなければ秩序の発生が生じないことがわかる．

12.3.3 配向秩序変数のスケーリング則

相互作用確率の転移点からの差 $c - c_{\text{tr}}$ に対する配向秩序変数 P のスケーリング則を導出する．移流項が無視できる v_0 の小さい極限を考えるが，その妥当性は以下の理由に基づく．転移点より上の領域でもモード $k \neq \pm 1$ に対する減衰率が正を保ち続ける転移点の極近傍の領域を考える．移流項の存在により $f_{k \pm 1}$ のカップリングの項が減衰率に入ってくるが， $k = \pm 1$ の場合，これは減衰率 $\Lambda_1(\mathbf{q})$ に $\mathcal{O}(v_0^{|k|-1} f_{\pm 1})$ のオーダーの寄与をもたらす．従って，移流速度 v_0 が十分小さければ，移流項のカップリングの影響は小さい．よって，上述の c の領域の上では v_0 の小さい極限において，配向秩序変数の挙動を計算することが許される．

転移点では密度は一様なので，分布関数としては空間依存性を含まない $f(\theta) = \sum_k f_k e^{ik\theta}$ を考える． $L \times L$ の有限の大きさを持った周期境界条件の 2次元系を考えれば長波長モード ($\mathbf{q} \simeq 0$) は無視できるため，転移点より上の領域でも密度は一様に保たれたまま解析することができる．このとき，ボルツマン方程式に分布関数を代入して計算すると，

$$0 = -s \sum_k f_k e^{ik\theta} + s \sum_k (2\pi p_k) f_k e^{ik\theta} - 2\pi c \mathcal{I} \sum_{k, k'} K_{k'} f_{k'} f_k e^{i(k+k')\theta} \quad (232)$$

$$+ 2\pi c \mathcal{I} \sum_{k, k', k''} (2\pi \hat{p}_k) K_{k'} f_{k'} f_{k-k''} \left(\delta_{k, -2(k'-k'')} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k'-k''} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k + 2(k' - k'')} \delta_{k, \text{odd}} \right) e^{ik\theta}$$

を得る．局所的な配向秩序変数ベクトル $\mathbf{E} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{e}(\theta) f(\theta) / \rho_0$ の大きさは転移点近傍では小さいため，その大きさを $\epsilon \ll 1$ と定める．このとき，式 (232) における分布関数のフーリエ成分の階層的な結びつきにより，各フーリエ成分は $f_k = \mathcal{O}(\epsilon^{|k|})$ のオーダーと見積もることができる．従って，ここでは $f_0, f_{\pm 1}, f_{\pm 2}$ の成分のみを考え， $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ のオーダーの項は無視する [29]．配向秩序変数を求めるためには $f_{\pm 1}$ の大きさがわかればよい．

式 (232) の両辺に $e^{-i\theta}$ をかけて， θ で積分すると

$$0 = - \left\{ s(1 - 2\pi p_1) - 4\sqrt{2} c \mathcal{I} f_0 \left(\frac{4}{3} \times (2\pi \hat{p}_1) - 1 \right) \right\} f_1 - \frac{28\sqrt{2}}{15} c \mathcal{I} (2\pi \hat{p}_1) f_{-1} f_2 \quad (233)$$

を得る．ただし，式 (I.96), (I.98) を計算に用いた．また，同様に $e^{-2i\theta}$ をかけて積分すると

$$0 = - \left\{ s(1 - 2\pi p_2) + \frac{8\sqrt{2}}{3} c \mathcal{I} f_0 \right\} f_2 + 4\sqrt{2} c \mathcal{I} (2\pi \hat{p}_2) f_1^2 \quad (234)$$

となるため

$$f_2 = \frac{4\sqrt{2}c\mathcal{I}(2\pi\hat{p}_2)}{s(1-2\pi p_2) + \frac{8\sqrt{2}}{3}c\mathcal{I}f_0} f_1^2. \quad (235)$$

を得る. 式 (235) を式 (233) に代入し, 転移点の式 (227) も用いて差 $(c - c_{\text{tr}})$ を陽に示せば

$$0 = 4\sqrt{2} \left(\frac{4}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) - 1 \right) \mathcal{I}f_0 f_1 (c - c_{\text{tr}}) - \frac{28\sqrt{2}}{15} c\mathcal{I}(2\pi\hat{p}_1) \times \frac{4\sqrt{2}c\mathcal{I}(2\pi\hat{p}_2)}{s(1-2\pi p_2) + \frac{8\sqrt{2}}{3}c\mathcal{I}f_0} |f_1|^2 f_1 \quad (236)$$

を得る ($f_{-1} = f_1^*$). 以上より, $c - c_{\text{tr}}$ 以外で登場する c を c_{tr} に置き換えて

$$|f_1|^2 = \frac{15 \left(\frac{4}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) - 1 \right) \left(s(1-2\pi p_2) + \frac{8\sqrt{2}}{3}c_{\text{tr}}\mathcal{I}f_0 \right)}{28\sqrt{2}c_{\text{tr}}^2 \mathcal{I}f_0(2\pi\hat{p}_1)(2\pi\hat{p}_2)} f_0^2 (c - c_{\text{tr}}) \quad (237)$$

が得られる.

配向秩序変数は

$$\begin{aligned} P &= |\mathbf{E}| \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left| \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{e}(\theta) f(\theta) \right| \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left| \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) (f_1 e^{i\theta} + f_{-1} e^{-i\theta}) \right| \\ &= \frac{2\pi}{\rho_0} |f_1| \end{aligned} \quad (238)$$

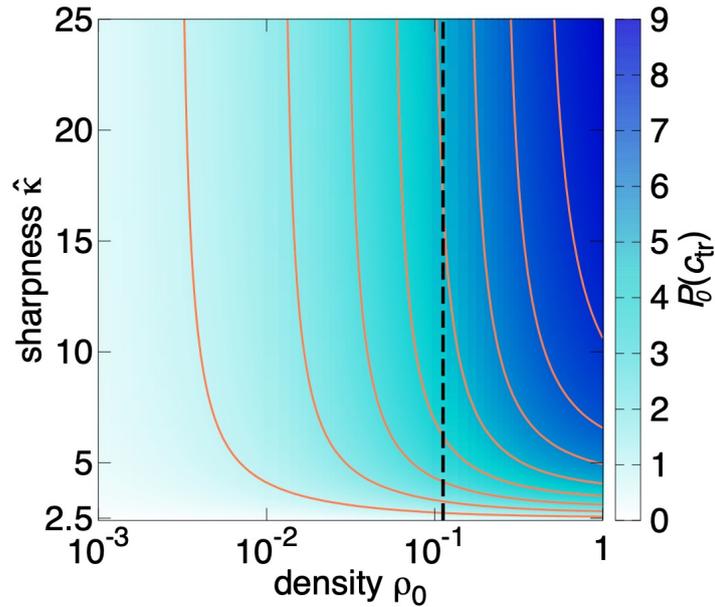


図 126: 係数 $P_0(c_{\text{tr}})$ の密度 ρ_0 と確率分布の鋭さ $\hat{\kappa}$ に対する依存性. 下限 $\hat{\kappa} = 2.4$ は $2\pi\hat{p}_1|_{\hat{\kappa}=2.4} \simeq 0.754 > 3/4$ を満たす. 黒の破線は密度の適用上限を表し, オレンジの等高線は $P_0(c_{\text{tr}}) = 1, 2, \dots, 9$ を示す.

であるので, $|f_1|$ を代入して

$$P = \left\{ \frac{15 \left(\frac{4}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) - 1 \right) \left(s(1 - 2\pi p_2) + \frac{8\sqrt{2}}{3} c_{\text{tr}} \mathcal{I}f_0 \right)}{28\sqrt{2}c_{\text{tr}}^2 \mathcal{I}f_0 (2\pi\hat{p}_1)(2\pi\hat{p}_2)} \right\}^{\frac{1}{2}} (c - c_{\text{tr}})^{\frac{1}{2}} := P_0(c_{\text{tr}})(c - c_{\text{tr}})^{\frac{1}{2}} \quad (239)$$

というスケーリング則を得る. 係数 $P_0(c_{\text{tr}})$ は c_{tr} の減少関数となっている. 図 126 に $P_0(c_{\text{tr}})$ の $\rho_0, \hat{\kappa}$ 依存性を示す. 高密度やノイズが小さい ($\hat{\kappa}$ が大きい) 場合, c_{tr} は小さくなるため $P_0(c_{\text{tr}})$ が増加して急激に配向秩序が増加するようになる.

12.3.4 相転移の次数

本モデルの相転移の次数について述べる. 先行研究 [29, 199] より, 相転移の次数の情報は $\text{Re } \Lambda_1$ に含まれることが知られている. $\text{Re } \Lambda_1$ が密度に依存すれば不連続転移となり, 密度に依存しなければ連続転移となる. この事実は定性的には以下のように解釈される. 不連続転移の場合, 転移点周りで無秩序状態と秩序状態の相共存状態である Vicsek バンドが出現するが, Vicsek バンドの波長は密度に依存する. よって, Vicsek バンドの出現は密度に依存した特定の波長 (波数モード) が不安定化に対応し, これは転移点の情報を含む $\text{Re } \Lambda_1$ が密度に依存することを意味する. 一方で, 連続転移は距離に依存しない相互作用のモデル (メトリックフリーのモデル) で確認されており, 転移点周りでバンド構造は出現せず, 連続的に密度一様のまま秩序状態へ移行していく. 言い換えると, 相互作用に特徴的な長さが存在しないため, $\text{Re } \Lambda_1$ にも空間次元を含む密度など空間スケールを特徴づける量が含まれないと言える.

本モデルでは $\partial\Lambda_1/\partial\rho_0 \neq 0$ であるため, 本質的に不連続転移である. よって, 相転移の性質に相互作用の非局所性は影響しない. これは非局所相互作用を持つ自己駆動粒子モデルの Vicsek モデルが不連続転移である [203] ことから妥当な結果である. ちなみに Vicsek モデル以外にも非局所な斥力相互作用を持つネマチック系においても不連続転移が確認されている [201]. ただし, 高密度の極限では $\text{Re } \Lambda_1$ の密度依存性を担う $\mathcal{I}\overline{f_0}$ が定数 $1/\Phi$ に漸近していくため, 密度依存性は小さくなり連続転移に近づいていくと考えられる. 高密度の状態では視覚相互作用は遮蔽効果により, 近傍の個体とのメトリックフリーのトポロジカル相互作用に近くなることから定性的に説明できる. また上節で示したように, 移流項が小さい極限ではほとんど連続転移として扱うことができる. これは局所 2 体衝突モデルに比べ, 相互作用が非局所であるために空間的な揺らぎが抑制されやすく, ほとんど一様密度のまま秩序相へ移行していくことに由来すると考えられる.

12.4 局所 2 体衝突モデルへの極限

最後に, 局所 2 体衝突モデルが本モデルの極限的な状態として含まれることを示す.

12.4.1 局所 2 体衝突モデルでの $K(\psi)$

極限対応を行う前に, 本モデルで用いた $K(\psi)$ は局所モデルで用いられたものと異なるため, 後者の場合の線形安定性解析について示す. 先行モデルの式 (204) より角度依存性の項は $|\mathbf{e}(\theta') - \mathbf{e}(\theta)| = |(\cos \theta' - \cos \theta, \sin \theta' - \sin \theta)| = \sqrt{2(1 - \cos(\theta' - \theta))}$ と書くこ

とができる．従って，先行モデルでは $K(\psi) = \sqrt{2(1 - \cos \psi)}$ を用いている．このとき，

$$K_k = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} \quad (240)$$

となり，減衰率の式 (I.95) に代入して

$$\operatorname{Re} \Lambda_k(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_k) + 8c\mathcal{I}\bar{f}_0 W_k(\mathbf{q}) \quad (241)$$

$$W_k(\mathbf{q}) := 1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \frac{1}{1 - (2k)^2} \quad (242)$$

$$-(2\pi\hat{p}_k) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \left(\frac{\delta_{k,\text{even}}}{1 - k^2} + \frac{1}{2}\delta_{k,\pm 1} - \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}k - 1}{1 - k^2} \delta_{k,\{\pm 3, \pm 5, \dots\}} \right)$$

を得る． $W_k(\mathbf{q})$ の場合分けを行うと以下のようになる．

- $k = \pm 1$ の場合， $W_{\pm 1}(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{3}\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \times (2\pi\hat{p}_k) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right)$
- k が偶数の場合， $W_k(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{(2k)^2 - 1}\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) + \frac{1}{k^2 - 1}(2\pi\hat{p}_k) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) > 0$
- k が奇数かつ $k \neq \pm 1$ の場合，

$$W_k(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{(2k)^2 - 1}\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) - \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}k - 1}{k^2 - 1}(2\pi\hat{p}_k) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \quad (243)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{(2k)^2 - 1}\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{|k| + 1}(2\pi\hat{p}_k) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) > 0$$

従って，減衰率は $k = \pm 1$ のモード

$$\operatorname{Re} \Lambda_1(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_1) - 8c\mathcal{I}\bar{f}_0 \left\{ \frac{1}{3}\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \times (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) - 1 \right\} \quad (244)$$

のみが負になり得る． $\mathbf{q} = 0$ においては，

$$\operatorname{Re} \Lambda_1(\mathbf{0}) = s(1 - 2\pi p_1) - 8c\mathcal{I}\bar{f}_0 \left(2\pi\hat{p}_1 - \frac{2}{3}\right) \quad (245)$$

となり，相転移は $2\pi\hat{p}_1 > \frac{2}{3}$ の場合に生じるとわかる．このように $K(\psi)$ の関数形は本モデルの定性的な挙動には影響を与えないことがわかる．

12.4.2 局所 2 体衝突モデルとの対応

局所モデルとの対応を考えるために， $I_{\text{vis}}[f]$ の内在効果因子の距離依存性を明示すると

$$I_{\text{vis}}[f] = -c \int d^2\mathbf{r}' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{2R_0^2}\right) K(\theta' - \theta) \quad (246)$$

$$\times f(\mathbf{r}, \theta, t) f(\mathbf{r}', \theta', t)$$

$$+ c \int d^2\mathbf{r}' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{2R_0^2}\right) K(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\times f(\mathbf{r}, \theta_1, t) f(\mathbf{r}', \theta_2, t) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2))$$

となる．一方で，局所モデルの衝突項 (204) は $c_{\text{col}} = 2d_0v_0$ を導入して

$$I_{\text{col}}[f] = -c_{\text{col}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' K(\theta' - \theta) f(\mathbf{r}, \theta, t) f(\mathbf{r}, \theta', t) \quad (247)$$

$$+ c_{\text{col}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) f(\mathbf{r}, \theta_1, t) f(\mathbf{r}, \theta_2, t) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2))$$

となる．この二つを比較すると，相互作用距離 R_0 がゼロになる極限で空間依存の項 $\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{2R_0^2}\right)$ がデルタ関数 $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ になれば， $I_{\text{vis}}[f] \rightarrow I_{\text{col}}[f]$ に移行することがわかる．よって，相互作用確率 c を $c = c_{\text{col}}/(2\pi R_0^2)$ と置き換えれば， $1/(2\pi R_0^2)$ をガウス関数に押し付けて極限 $R_0 \rightarrow 0$ を取ることで $\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{2R_0^2}\right) / (2\pi R_0^2) \rightarrow \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ を得る．言い換えると， cR_0^2 を定数に保ったまま $R_0 \rightarrow 0$ の極限を取ることで局所モデルに一致する．

この極限を減衰率 (245) に適用する． $R_0 \rightarrow 0$ では $\overline{I f_0} \rightarrow \rho_0 R_0^2$ であることを利用して，

$$\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{0}) = s(1 - 2\pi p_1) - 8\rho_0 c R_0^2 \left(2\pi \hat{p}_1 - \frac{2}{3}\right) \quad (248)$$

となる．ここで， $c = c_{\text{col}}/(2\pi R_0^2)$ の置き換えを実行すると

$$\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{0}) = s(1 - 2\pi p_1) - \frac{8}{\pi} \rho_0 \frac{c_{\text{col}}}{2} \left(2\pi \hat{p}_1 - \frac{2}{3}\right) \quad (249)$$

を得る． $c_{\text{col}} = 2d_0v_0$ を代入し， $\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{0}) = 0$ から密度の転移点を求めると

$$\rho_{0,\text{tr}} = \frac{\pi s}{8d_0v_0} \frac{1 - 2\pi p_1}{2\pi \hat{p}_1 - \frac{2}{3}} \quad (250)$$

となる．これは局所モデルの流体方程式 (205) から得られた密度の転移点の式 (208) に一致する．

13 結論

集団運動は生物の普遍的な行動様式である。集団運動の物理学はここ数十年で急速に発展し、様々な個体間の相互作用が考えられてきた。しかし、昆虫や鳥、魚など大型生物の神経系を介した知覚による相互作用に対しては、既存のモデルを当てはめて集団運動を理解することが難しいという課題があった。本研究では、観測データが豊富に蓄積されており、定常的で多様な集団パターンを示す魚を対象とし、群れの形成メカニズムに着目しモデル化を行った。本研究全体を通して意識した点は、実験との定量的な比較が可能なモデルを構築すること、及び魚種によらず普遍的に使用できるモデルを構築することである。このことを念頭に置き、大きく分けて4つの研究を行った。

(I) 第5章, 第6章: 自己駆動粒子を用いた巨大魚群のモデル化。

3次元での体長の数十倍を超える巨大な回転魚群を再現するために、自己駆動粒子を用いた新規モデルを構築した。第4章で述べたように、自己駆動粒子の先行モデルにおいてはいくつかの課題が存在する。回転クラスターのサイズが相互作用半径より小さいこと、数百粒子程度の小さな系を扱いそもそもサイズに注目していないことや、相互作用に関わるパラメータが実験とどう対応するのか比較が困難であることが挙げられる。そこで、本研究では以下の点を工夫した。

- 第3章で述べた、トポロジカル相互作用、fast-startによる短時間の引力、群れの中での引力の消失(斥力と配向相互作用の卓越、重力感知の導入)など、群れの形成で重要とされている実験的知見を組み込んだ。
- 引力と斥力の平衡距離や相互作用による最大到達速度など、実験で測定されている値からパラメータが定量的に決定できるようにモデルを構築した。
- 相互作用の特徴的な距離とクラスターのサイズの長さスケールに数十倍の差異があるため、2種類の初期条件を用意することで、数値計算コストを抑えた。

これらの工夫により、以下の結果を得ることができた。

- 3次元で数千個から数万個の自己駆動粒子を用いて、体長の数十倍を超える回転クラスターを得ることができた。特に球状の回転クラスターは、自然界ではベイト・ポールとして知られているが、先行研究では得られていなかった新規パターンである。
- 各個体が相互作用できる個体数 N_u 、引力の強度 λ を変更することで、多様な集団パターンを得ることができ、それらを定量的に分類した。回転パターンは N_u が小さく他の個体の運動変化を鋭敏に読み取り、 λ が大きく fast-start によるクラスターの表面付近の個体の方向転換が起きやすい場合によく生じる傾向があることがわかった。
- 回転パターンの出現する N_u 、 λ の範囲は、実験から見積もられる N_u 、 λ の値と比較しても、大きなずれはない。
- 個体数と回転クラスターの射影面積の間にスケーリング則(べき乗則)が成り立つことを示した。さらに、そのべき指数が、実際の魚群で観測されているスケーリング

則のべき指数によく一致した。この結果は、本モデルが巨大回転魚群の観測結果を定量的に再現していることを示し、定性的パターンの再現にとどまる先行モデルと大きく異なる点である。

- 回転クラスター内で各個体は動径方向にランダムに運動することがわかった (内径と外径の間を行ったり来たりしている)。これは、クラスターが剛体回転する先行モデルと異なる点であり、自然の魚群により近い。
- 重力と垂直な向きに方向転換する効果を導入すると、円柱状の回転クラスターが出現した。このパターンも先行モデルでは見られていない新規パターンであるが、自然界に存在するものである。
- 遊泳の基本的なタイムスケールよりも、重力検知による方向転換のタイムスケールが 100 倍程度大きくても (すなわち重力感知の効果が弱くとも)、回転クラスターの渦軸はほぼ鉛直方向に固定されることがわかった。
- 群れが一様に配向するパターンに対しては、重力検知の導入により、鉛直方向に伸長した翼型のパターンも得られた。これも新規パターンである。

(II) 第 8 章: 振動翼を持つ遊泳モデルの構築と流体相互作用による尾ヒレの運動の同期の検証。

逆カルマン渦による流体相互作用 (第 3 章) を取り入れて、自発的に推進する振動翼モデルを構築した。第 7 章で述べたように、流体相互作用を導入した先行モデルでは、個体間の距離が固定されていたり、尾の運動の位相差が固定されていたりと、運動の自由度が一部制限されている。また、遊泳のモデルは基本的に計算コストが高く、今後の応用において個体数が多い場合を検証するには低計算コストのモデルを構築する必要があった。そこで、本研究では以下の点を工夫した。

- 魚の尾の運動を、1 つのヒンジに平板がついた振動翼であるとみなし、2 次元平面上を 1 次元的に運動する遊泳モデルを考えた。
- 定常流におけるニュートン抵抗と、付加質量による非定常な慣性力を流体力として考慮する、準定常振動翼モデルを構築した。
- アクティブな駆動力は生理学的要素 (CPG) に由来するとし、そこに発生する自然なノイズを加え定式化した。これにより、自発的に尾運動の位相を変えつつ遊泳することが可能となった。
- ほとんどのパラメータを実験事実から決定し、尾の振幅が様々な魚種の遊泳の基本振幅 A_0 に一致するようにパラメータを調整した。

これらの工夫により、以下の結果を得ることができた。

- 実験で観測されている推進速度と尾運動の振動数の線形関係やストローハル数 $St \sim 0.3$ など (第 2 章参照) を、実験とよく一致する形で再現することができた。
- 尾運動の軌跡は体軸に対して対称的で、これは定常遊泳する魚の尾運動の性質に一致する。
- ノイズの大きさを、重心速度、振幅、振動数の確率分布が実験結果と定性的に一致

した。

- 2 個体が同じ方向に遊泳するとき、尾の運動が渦を介して同期することで推進方向の距離 d_{\parallel} と尾運動の位相差 ψ の確率分布に位相差に対する周期的な依存性が出現した。この依存性は $d_{\parallel} \lesssim 1$ の領域で強く、これは実験結果とも一致する。
- d_{\parallel} と ψ の関数としての遊泳のエネルギー散逸率 Θ にも、 $d_{\parallel} \lesssim 1$ の領域で位相差に対する周期的な依存性が出現した。 ψ に関する期待値 μ_{Θ} をとると、 $d_{\parallel} \lesssim 0.5$ において単独遊泳時のエネルギー散逸率からの減少が見られ、渦によって遊泳に要するエネルギーが削減されていることがわかった。
- 距離 d_{\parallel} の確率分布の時間発展から、エネルギー散逸率が減少する $d_{\parallel} \lesssim 0.5$ の領域に自発的に向かって 2 個体が接近することがわかった。このように重心位置と尾ヒレの自発的な運動を取り入れることで、エネルギー散逸率が減少する運動を取ることを示した。
- 尾ヒレの位相の自発的な時間発展によりエネルギー散逸率が減少する一方で、最適化はなされていないという結果を得た。これはロボットと金魚を比較した実験からも定性的に予想されていたが、本研究では単一のモデルで初めて示すことができた。

(III) 第 10 章: 視覚相互作用による選択的意思決定と集団運動の再現。

視覚に関わる神経回路の特性や、視覚像に対する反応の実験結果 (第 3 章) を取り入れて、視線の方向が視覚刺激に従って時間発展するモデルを構築した。第 4 章で述べたように、視覚相互作用を導入した集団運動の先行モデルでは、視認可能な全ての個体と相互作用する方法を採用しており、選択的意思決定は定式化されていなかった。一方で、第 9 章で述べたように、選択的意思決定の先行モデルは、少数個体に対する特定の実験結果を再現するために現象論的に構築されたモデルとなっていた。そこで、本研究では選択的意思決定が視覚の神経機構に基づいて行われると考え、モデルを構築した。具体的には以下の点を工夫した。

- 他の個体の視覚情報を担う変数として、像の鉛直角直径を採用し、相対速度も加えた。鉛直角直径は、魚が相手との距離を像の高さにより決定しているという実験結果から採用した。相対速度は、網膜神経細胞のひとつであるアマクリン細胞の速度検知機構の存在と魚がより速い個体を追跡するという実験結果から採用した。
- 信号強度を視蓋でのレチノトピックマップ上のポテンシャルとみなし、視線の方向がポテンシャルの極小点に誘導されるとして定式化した。これにより、自発的に相手個体を選択する機構が導入できた。
- 視線の方向では、視覚の限界分解能により、分解能角度内で情報が平均化されるとした。これにより、分解能角度より小さい角度幅の像からの情報を排斥する機構を導入できた。
- 魚を平板個体で置き換え、視覚的に大きさのある個体として導入することで、簡便に視覚情報を計算できるようにした。
- 運動学的なパラメタに加え、視覚神経に関するパラメタもさまざまな実験から直接的に決定した。視覚情報は神経節細胞に対応するピンごとに測定され、刺激信号は

受容野に対応する幅を持つ。

これらの工夫により、以下の結果を得ることができた。

- 選択的意思決定を検証するために、先行実験と同じく、少数の標的を追跡する状況を設定した。これにより、実験で観測されていたような個体の位置の確率分布の分岐現象を再現した。
- 全ての個体と相互作用する従来型のモデルとも比較を行い、選択的意思決定の機構により、分岐現象が得られていることを明確に示した。
- 集団運動のシミュレーションでは、4種類の定常的な集団パターンを得ることができた。集団パターンの大きさは観測に基づく大きさと定性的に一致した。
- 集団運動は、少数匹での標的の追跡で用いた同じパラメタで出現し、単一のモデルで少数匹と多数匹の特徴的な性質を再現することができた。
- 秩序変数により集団パターンを分類し、パターン相図を描くと、実験から推定されるパラメタ値で、swarm, vortex, polarized school が出現した。このことは、神経節細胞の前後非対称性が多様な集団パターンの発現に寄与していることを示唆する。
- クラスター中の個体の視野が相手個体に占められる割合を測定し、その割合が実験値と一致することを示した。
- クラスター中の個体が視認できる相手個体のトポロジカル距離を、相互作用のないランダムなクラスターの場合と比較した。その結果、相互作用によって他個体が視覚を遮蔽するように移動し、視認できる距離が小さくなることを示した。
- クラスター中の個体に作用する力をトポロジカル距離の関数として見ると、1次近接個体に対する斥力が支配的であることがわかった。これは実験とも一致する結果であり、第5章の現象論モデルのトポロジカル相互作用の起源を視覚相互作用によって説明しうる結果である。
- 2,3匹の個体間の力の分布を測定したところ、2体相互作用については距離依存性、および相対速度依存性が実験と概ね一致する結果となった。また、個体間の前後距離を保つような復元力をもたらす3体力を一部再現した。

(IV) 第12章: 視覚相互作用に対するボルツマン方程式の構築。

個体数が多い場合の視覚相互作用の性質を探るために、ボルツマンアプローチを用いて連続体モデルを構築した。このモデルは、局所2体衝突による配向相互作用のボルツマン方程式(第11章)をベースとして、非局所的視覚相互作用に拡張したものである。この拡張にあたって、本質的に多体相互作用である視覚の遮蔽効果をどのようにボルツマン方程式で扱うかという問題があった。本研究では以下の点を工夫した。

- 限界分解能角度中では各個体が識別できず密度場(平均場)として扱えるという発想から、自己無撞着的に密度場を介した視覚遮蔽の効果を導出した。これにより、離れた位置にいる相手を視認できる確率を求め、視覚の遮蔽効果を近似的に2体相互作用として扱う方法を確立した。
- 相手を視認する確率は視覚遮蔽の幾何学的な要因だけでなく、個体の内在的性質に

もよる。相手個体との距離や運動方向の相対角度に対する依存性を実験結果にもとづいて決定した。

これらの工夫により、以下の結果を得ることができた。

- 線形安定性解析を実行し、摂動の減衰率を導出した。配向秩序が発生する転移点では減衰率がゼロになることより、転移点上で満たすべき関係式を導出した。この関係式から、相転移が起こるときの配向相互作用確率の値を導出した。
- 実験において魚群の配向秩序が発生する密度では、遮蔽の効果が有意に働き、転移が起こりにくくなることを示した。
- 配向相互作用の強さを変化させたとき、本モデルは不連続転移をもたらすことを示した。これは非局所相互作用を持つ自己駆動粒子モデルが不連続転移を引き起こすことから妥当な結果である。
- 一方で、視覚相互作用の非局所性により転移の不連続性は弱まり、有限サイズの系ではほとんど連続転移とみなせることを示し、配向秩序変数のスケーリング則を導出した。

以上のように本研究では、複雑な知覚行動が影響する魚の相互作用を実験データに基づいて理解し、モデルを構築し、得られた結果を実験結果と比較するというプロセスの有用性が明らかになった。先行モデルには実験結果の再現を目標としたモデルは少なく、本研究のアプローチ自体が新しい成果であると考えている。今後は、視覚相互作用と流体相互作用の観点から更なる研究を予定している。視覚相互作用の観点では、網膜での信号の選択性や右脳左脳の情報統合により、これまで現象論的に導入していた力の分布を、純粋な視覚刺激から導出することを試みる。流体相互作用の観点では、これまでモデル化されていない、流れを読み取る器官である側線による能動的流体相互作用の定式化に挑む。本研究のアプローチは他の生物種や集団ロボットやドローンの制御にも応用可能であり [205–207]、自律的な知覚行動による集団運動の理解に役立つと考える。

付録

A ヒルベルト変換

ヒルベルト変換の一般的手法について述べる [208]. 時間的に振動するデータ $x(t)$ が存在するとき, その振動の振幅 $A(t)$ と位相 $\phi(t)$ を定義したい. ただし, 未知関数 2 つ $A(t)$, $\phi(t)$ に対して既知関数 $x(t)$ は 1 つのため, 本来はこの 2 つを同時に求めることは不可能である. ここでの目的は無数に考えられうる $A(t)$ と $\phi(t)$ の時間発展の候補のうち, 直感的に妥当であるような $A(t)$ と $\phi(t)$ を定義することである. その 1 つの定義としてヒルベルト変換がよく用いられる.

関数 $x(t)$ に対してヒルベルト変換された関数 $\hat{x}(t)$ は次のような主値積分で定義される.

$$\hat{x}(t) := \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{x(\tau)}{t - \tau}. \quad (\text{A.1})$$

主値積分にフーリエ変換を施すと

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{x(\tau)}{t - \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega x_{\omega} \left(\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau e^{i\omega\tau}}{\pi t - \tau} \right) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega x_{\omega} G(t, \omega) \quad (\text{A.2})$$

を得る. 主値積分 $G(t, \omega)$ を計算するには ω の正負に応じて場合分けをする必要がある. $\omega = 0$ のときは主値積分の定義に従って $G(t, 0) = 0$ を得る. $\omega > 0$ の場合は図 127 のような複素積分を実行する. 留数定理より

$$G(t, \omega > 0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{小半円}} \frac{d\tau e^{i\omega\tau}}{\pi t - \tau} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{大半円}} \frac{d\tau e^{i\omega\tau}}{\pi t - \tau} = 0 \quad (\text{A.3})$$

の関係式を得る. 第 3 項は慣例通り $R \rightarrow \infty$ でゼロになるので, 第 2 項のみを計算する. $\varepsilon e^{i\theta} = t - \tau$ と変数変換すれば,

$$G(t, \omega > 0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{小半円}} \frac{d\tau e^{i\omega\tau}}{\pi t - \tau} = i e^{i\omega t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{d\theta}{\pi} e^{-i\varepsilon\omega e^{i\theta}} = -i e^{i\omega t} \quad (\text{A.4})$$

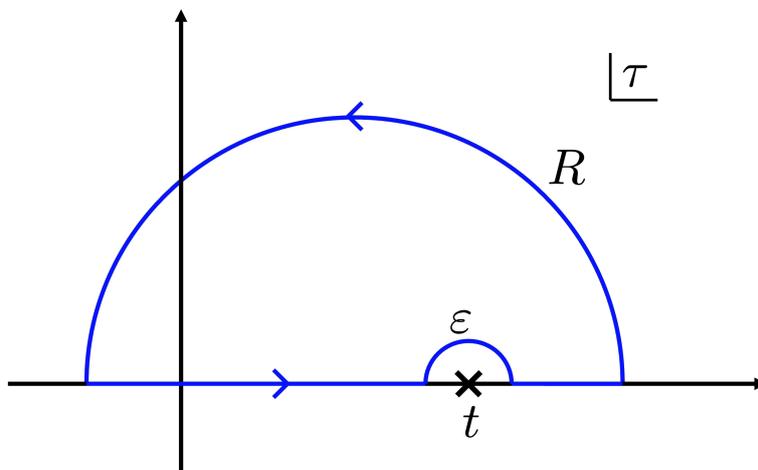


図 127: $\omega > 0$ の場合の τ 平面での積分経路. 実軸上の主値積分領域, t 周りの半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ の小半円, 及び半径 $R \rightarrow \infty$ の大半円からなる.

となる。 $\omega < 0$ の場合は小半円，大半円ともに複素平面下半分に経路をとって同様の計算をすれば

$$G(t, \omega < 0) = ie^{i\omega t} \quad (\text{A.5})$$

を得る。従って，符号関数 $\text{sgn}(\omega)$ を導入すれば

$$G(t, \omega) = -i\text{sgn}(\omega)e^{i\omega t} = e^{i(\omega t - \text{sgn}(\omega)\frac{\pi}{2})} \quad (\text{A.6})$$

とまとめられる。

以上より，ヒルベルト変換された関数は

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega x_{\omega} e^{i(\omega t - \text{sgn}(\omega)\frac{\pi}{2})} \quad (\text{A.7})$$

で求まる。つまり，フーリエ振動数が正の場合は位相を $-\pi/2$ ずらし，負の場合は位相を $\pi/2$ ずらしたものとして $\hat{x}(t)$ が定義されている。例えば， $x(t) = \cos(\omega t)$ は $\hat{x}(t) = \sin(|\omega|t)$ に， $x(t) = \sin(|\omega|t)$ は $\hat{x}(t) = \cos(\omega t)$ に変換される。このようにヒルベルト変換を施すと位相が $\pi/2$ 遅れた（進んだ）対になる関数が出てくる。よって， $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$ と $y(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$ から $A = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ ， $\phi = \tan^{-1}(y(t)/x(t)) = \omega t + \phi_0$ が得られるように，

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (\text{A.8})$$

$$\phi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right) \quad (\text{A.9})$$

として振幅と位相を定義する。このように振幅と位相を定義することはデータ列を $x(t) = A(t) \cos(\phi(t))$ ， $\hat{x}(t) = A(t) \sin(\phi(t))$ と定義しているとも考えることもできる。具体的な例として， $x(t) = \cos(40\pi t)(1 + \sin(10\pi t)/2)(1 + \sin(4\pi t)/2)$ の場合を図 128 に示

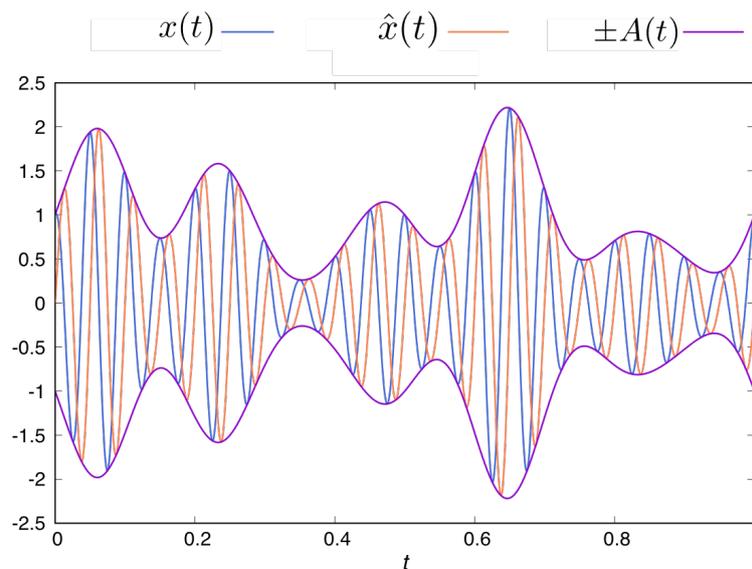


図 128: ヒルベルト変換の例。試験関数は $x(t) = \cos(40\pi t)(1 + \sin(10\pi t)/2)(1 + \sin(4\pi t)/2)$ 。

す。 $x(t)$ に対して振幅 $A(t)$ が包絡線状に形成されており，ヒルベルト変換の妥当性がうかがえる。

ちなみに，数値計算でヒルベルト変換を実行する場合，式 (A.7) を直接計算するよりかはフーリエ変換を $\mathcal{F}(\circ)$ と定義して

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \text{Im}(x(t) + i\hat{x}(t)) \\ &= \text{Im}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(x_\omega + ix_\omega e^{-i\text{sgn}(\omega)\frac{\pi}{2}}\right)\right) = \text{Im}\left[\mathcal{F}^{-1}\{(1 + \text{sgn}(\omega))x_\omega\}\right]\end{aligned}\tag{A.10}$$

とすると簡単に求まる。

B 一様なトーラスの主慣性モーメント

内径が R_i ，外径が R_o ，質量が m の一様なトーラスの主慣性モーメントを求める。大半径 $a = (R_o + R_i)/2$ と小半径 $b = (R_o - R_i)/2$ を定め，パラメタ $\rho \in [0, b]$ と $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$ を用意する。このとき，トーラス内部はデカルト座標で

$$\begin{cases} x = (a + \rho \cos \psi) \cos \phi, \\ y = (a + \rho \cos \psi) \sin \phi, \\ z = \rho \sin \psi \end{cases}\tag{B.11}$$

と記述できる (図 129)。また，体積 $V = 2\pi^2 ab^2$ ，密度 $\sigma = m/V$ ，ヤコビアン

$$\begin{aligned}J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \phi & -(a + \rho \cos \psi) \sin \phi & -\rho \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \sin \phi & (a + \rho \cos \psi) \cos \phi & -\rho \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi & 0 & \rho \cos \psi \end{vmatrix} \\ &= \rho(a + \rho \cos \psi)\end{aligned}\tag{B.12}$$

を定める。

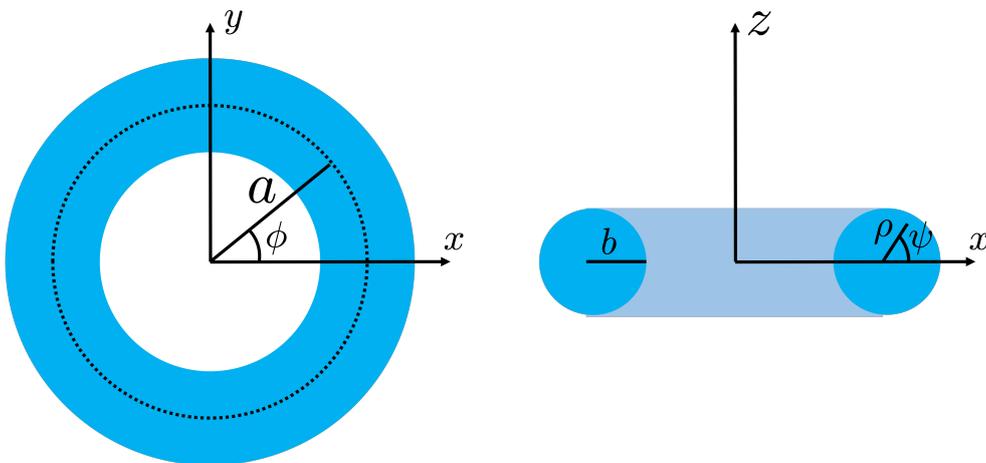


図 129: トーラスの断面と座標系。大半径 a ，小半径 b とパラメタ ρ, ϕ, ψ を示す。

まず, z 軸周りの主慣性モーメント I_1 は

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma \int_{\text{トラス}} dV (x^2 + y^2) \\
&= \sigma \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \rho (a + \rho \cos \psi) (a + \rho \cos \psi)^2 \\
&= 2\pi\sigma \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} d\psi (a^3 \rho + 3a\rho^3 \cos^2 \psi) \\
&= 2\pi^2 ab^2 \sigma \left(a^2 + \frac{3b^2}{4} \right) \\
&= \frac{m}{8} (8a^2 + 6b^2) \tag{B.13}
\end{aligned}$$

となる. ψ に関する三角関数の奇数べきの項は ψ の積分でゼロになる. 続いて, x 軸, y 軸周りの主慣性モーメント I_2, I_3 は, 系が対称的なので I_2 のみ計算すると,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sigma \int_{\text{トラス}} dV (y^2 + z^2) \\
&= \sigma \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \rho (a + \rho \cos \psi) [\{(a + \rho \cos \psi) \sin \phi\}^2 + (\rho \sin \psi)^2] \\
&= \pi\sigma \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} d\psi (a^3 \rho + a\rho^3 (2 + \cos^2 \psi)) \\
&= 2\pi^2 ab^2 \sigma \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5b^2}{8} \right) \\
&= \frac{m}{8} (4a^2 + 5b^2) \tag{B.14}
\end{aligned}$$

となる. 従って, これらの主慣性モーメントは I_1 が I_2, I_3 より大きく, その比は

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_3} = \frac{8a^2 + 6b^2}{4a^2 + 5b^2} = \frac{8(R_o + R_i)^2 + 6(R_o - R_i)^2}{4(R_o + R_i)^2 + 5(R_o - R_i)^2} \tag{B.15}$$

となる.

C 渦軸の運動による動径距離のシフト量

集団運動の回転パターンの渦軸の傾きが時間変化するとき, 各粒子の動径距離がどれだけ変化するかを計算する. 図 130 に示すように, δt だけ時間が経ったとき渦軸 $\mathbf{e}_M(t) = \mathbf{M}(t)/|\mathbf{M}(t)|$ が $\mathbf{e}_M(t + \delta t)$ に移ったとする. このとき, $\mathbf{e}_M(t)$ と $\mathbf{e}_M(t + \delta t)$ のなす角を $\delta\theta_M$ とする. δt は微小のため, この間に粒子は変化しないと仮定すると, 動径距離 $c^\perp(t)$ と $c^\perp(t + \delta t)$ の関係により各粒子のシフトした距離がわかる. 図 130 のように座標系を貼り, δt 後の座標系は元の座標系を ϕ_M だけ回転させてから $\delta\theta_M$ だけ回転させたものとする. δt 後の座標系では, 回転行列の作用によって $c^\perp(t)$ と $c^\parallel(t)$ が以下のように変換される.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta\theta_M & \sin \delta\theta_M \\ 0 & -\sin \delta\theta_M & \cos \delta\theta_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_M & \sin \phi_M & 0 \\ -\sin \phi_M & \cos \phi_M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c^\perp(t) \\ c^\parallel(t) \end{bmatrix} \tag{C.16} \\
&= \begin{bmatrix} c^\perp(t) \sin \phi_M \\ c^\perp(t) \cos \delta\theta_M \cos \phi_M + c^\parallel(t) \sin \delta\theta_M \\ -c^\perp(t) \sin \delta\theta_M \cos \phi_M + c^\parallel(t) \cos \delta\theta_M \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

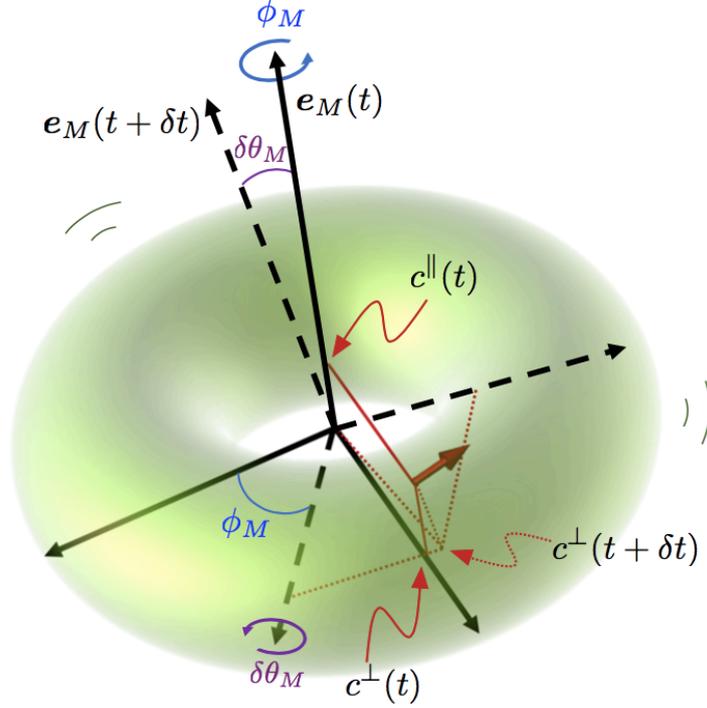


図 130: 渦軸の運動の模式図. 破線の座標系が δt 後の座標系である. 緑のトーラスが回転するクラスターを表し, 赤の矢印がクラスター中のある粒子を表す.

この第 1 成分と第 2 成分から, $c^{\parallel}(t)$ を求めることができ, $\delta\theta_M$ の 2 次まで展開すると以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& c^{\perp}(t + \delta t) \tag{C.17} \\
&= \left[(c^{\perp}(t) \sin \phi_M)^2 + (c^{\perp}(t) \cos \delta\theta_M \cos \phi_M + c^{\parallel}(t) \sin \delta\theta_M)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq \left[(c^{\perp}(t) \sin \phi_M)^2 + \left\{ c^{\perp}(t) \left(1 - \frac{\delta\theta_M^2}{2} \right) \cos \phi_M + c^{\parallel}(t) \delta\theta_M \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq c^{\perp}(t) \left[1 + 2 \left(\frac{c^{\parallel}(t)}{c^{\perp}(t)} \cos \phi_M \right) \delta\theta_M + \left\{ \left(\frac{c^{\parallel}(t)}{c^{\perp}(t)} \right)^2 - \cos^2 \phi_M \right\} \delta\theta_M^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq c^{\perp}(t) \left[1 + \left(\frac{c^{\parallel}(t)}{c^{\perp}(t)} \cos \phi_M \right) \delta\theta_M + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{c^{\parallel}(t)}{c^{\perp}(t)} \right)^2 \sin^2 \phi_M - \cos^2 \phi_M \right\} \delta\theta_M^2 \right]
\end{aligned}$$

よって, $c^{\perp}(t + \delta t)/c^{\perp}(t)$ は $\delta\theta_M$ の 1 次の項から $c^{\parallel}(t)/c^{\perp}(t)$ が大きいほど 1 からずれることがわかる. 仮に $\phi_M = \pm\pi/2$ で $\delta\theta_M$ の 1 次の項がゼロになったとしても, $\delta\theta_M$ の 2 次の項に同様のシフト傾向が残る. 従って, 同じ外径と内径を持つクラスターでも, 高さのあるクラスターほど動径距離の見かけのシフト量が大きくなることが主張される.

D 回転する円柱状クラスターの回転秩序変数

高さ h , 半径 a の一様な密度の円柱に対して円柱座標系を張る. 各粒子は位置 $\mathbf{c} = c_r \mathbf{e}_r + c_z \mathbf{e}_z$ で一定の速度 $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi$ で回転しているとする. 式 (4) を連続体化す

れば、この系の回転秩序変数は

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\pi a^2 h} \left| \int_{\text{円柱}} dV \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{c}| |\mathbf{v}|} \right| \\
&= \frac{1}{\pi a^2 h} \left| \int_0^a c_r dc_r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dc_z \frac{-c_z v_\phi \mathbf{e}_r + c_z v_r \mathbf{e}_\phi + c_r v_\phi \mathbf{e}_z}{\sqrt{c_r^2 + c_z^2} \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2}} \right| \quad (\text{D.18})
\end{aligned}$$

となる．積分の中身の第 1,2 項は c_z の積分で消えるので、実質的には

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_r}{v_\phi}\right)^2}} \frac{2}{a^2 h} \int_0^a c_r dc_r \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dc_z \frac{c_r}{\sqrt{c_r^2 + c_z^2}} := w(v_r, v_\phi) \Psi(a, h) \quad (\text{D.19})$$

の $\Psi(a, h)$ を計算する． $\alpha = c_z/c_r$ を導入して

$$\Psi(a, h) = \frac{2}{a^2 h} \int_0^a c_r^2 dc_r \int_{-\frac{h}{2c_r}}^{\frac{h}{2c_r}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{4}{a^2 h} \int_0^a dc_r c_r^2 \sinh^{-1} \left(\frac{h}{2c_r} \right) \quad (\text{D.20})$$

さらに、 $\beta = h/2c_r$, $q = h/2a$ を導入して部分積分すると、

$$\Psi(q) = 2q^2 \int_q^\infty \frac{d\beta}{\beta^4} \sinh^{-1} \beta = 2q^2 \left(\left[-\frac{\ln(\beta + \sqrt{1 + \beta^2})}{3\beta^3} \right]_q^\infty + \int_q^\infty \frac{d\beta}{3\beta^3 \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (\text{D.21})$$

ただし $\sinh^{-1} \beta = \ln(\beta + \sqrt{1 + \beta^2})$ を使用した． $\beta = \tan \gamma$ と置いて第 2 項の積分を整理すると

$$\int_q^\infty \frac{d\beta}{3\beta \sqrt{1 + \beta^2}} = \int_{\tan^{-1} q}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{3 \tan^3 \gamma \cos \gamma} = \int_{\tan^{-1} q}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{3 \sin \gamma} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - 1 \right) \quad (\text{D.22})$$

と \sin のみの積分になるので、 \sin のべき乗の積分公式を用いて積分可能になる． $\gamma = \tan^{-1} \beta$ を用いて β の式に直して式 (D.21) に戻れば

$$\begin{aligned}
\Psi(q) &= 2q^2 \left[-\frac{\ln(\beta + \sqrt{1 + \beta^2})}{3\beta^3} - \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{6\beta^2} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta} \right) \right]_q^\infty \\
&= \frac{1}{3q} \left\{ q\sqrt{1 + q^2} + 2 \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) + q^3 \ln \left(\frac{q}{1 + \sqrt{1 + q^2}} \right) \right\} \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

を得る．高さ h がゼロの極限では、 $q \rightarrow 0$ で $\Psi(q) \rightarrow (q + 2q + 0)/3q = 1$ となり、円板状のクラスターでは回転秩序変数が最大になることに対応している．あるいは、高さ h が無限大の極限では $q \rightarrow \infty$ で $\Psi(q) \rightarrow (q^2 + 2 \ln(2q) - q^2)/3q = 0$ となり、これは棒状のクラスターでは回転秩序変数がゼロになることを意味する．

E 2次元楕円柱の付加質量

理想流体中で振動する無限に長い楕円柱 (2次元楕円柱) の付加質量を計算する [153]. これは楕円柱にかかる力を求め、それを楕円柱の加速度で割ることで求まる．図 131(a) の

ように、半長軸 a 、半短軸 b の 2 次元楕円柱が x 軸と平行に $A \sin \omega t$ で振動している状況を考える。ただし渦度ゼロのポテンシャル流を仮定するため、微小振動 $A \ll b$ を要請する [39]。この運動を解析するために楕円座標系 (α, β) を張る (図 131(b), (c))。デカルト座標との関係は

$$x = c \cosh \alpha \cos \beta, \quad y = c \sinh \alpha \sin \beta \quad (\text{E.24})$$

となる。ただし $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ は焦点距離である。楕円柱の表面は (ゼロ次近似では)

$$x = a \cos \beta, \quad y = b \sin \beta \quad (\text{E.25})$$

と表されなければならないので、

$$\cosh \alpha_0 = \frac{a}{c}, \quad \sinh \alpha_0 = \frac{b}{c} \quad (\text{E.26})$$

となるような $\alpha = \alpha_0$ が楕円柱表面の α 座標の値となる。続いて、楕円座標の基底は $\mathbf{r} = (x, y)$ を微分して

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = (c \sinh \alpha \cos \beta, c \cosh \alpha \sin \beta), \quad (\text{E.27})$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = (-c \cosh \alpha \sin \beta, c \sinh \alpha \cos \beta) \quad (\text{E.28})$$

である。これより計量テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \gamma^2 \delta_{\mu\nu}, \quad \gamma^2 = c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta), \quad g^{\mu\nu} = \gamma^{-2} \delta^{\mu\nu} \quad (\text{E.29})$$

となる ($\mu, \nu, \dots = \alpha, \beta$)。また、計量テンソルの行列式は $g = \det(g_{\mu\nu}) = \gamma^4$ となる。線素は

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \gamma \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} \quad (\text{E.30})$$

である。

続いて、流体場の解析を行う。微小振動条件 $A \ll b$ の元では、楕円柱の周りの流体場は渦なし場 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ とみなせるので、

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (\text{E.31})$$

となるようなポテンシャル関数 ϕ が存在する [39]。さらに、流体の非圧縮性 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) も仮定すれば、ポテンシャル関数はラプラス方程式

$$\Delta \phi = 0 \quad (\text{E.32})$$

を解くことで求まる。楕円座標系においては、ラプラシアンは共変微分 \mathcal{D}_μ を用いて

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \gamma^{-2} \partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (\text{E.33})$$

となるので (アインシュタインの和の規約を用いている),

$$(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2) \phi = 0 \quad (\text{E.34})$$

を解けばよい。

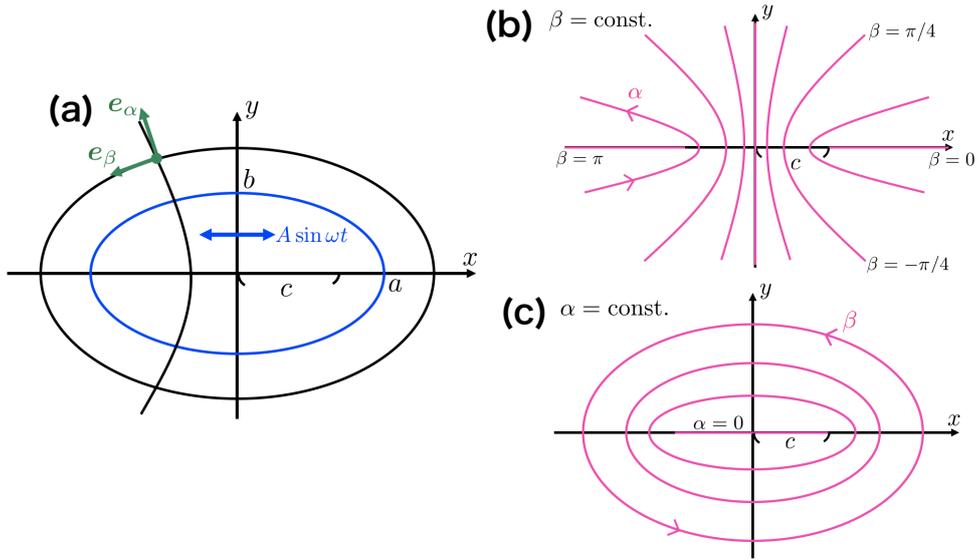


図 131: 楕円座標. (a) 振動 2 次元楕円体 (青色) のセットアップ. (b) α 座標. (c) β 座標.

このラプラス方程式を解くために境界条件を要請する. ひとつは無限遠では静止流体になることを要請する.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi(\alpha, \beta) = \text{const.} \quad (\text{E.35})$$

もうひとつは, 理想流体なので楕円柱の表面に垂直な成分の速度は楕円柱の運動速度に等しくなることより,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi(\alpha_0, \beta) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x A \omega \cos \omega t \quad (\text{E.36})$$

を要請する (\mathbf{n} は楕円柱表面の単位法線ベクトル). $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\alpha / |\mathbf{e}_\alpha| = \gamma^{-1} \mathbf{e}_\alpha$ であるので

$$\mathbf{n} \cdot \nabla = \gamma^{-1} \mathbf{e}_\alpha \cdot (\mathbf{e}^\mu \partial_\mu) = \gamma^{-1} \partial_\alpha \quad (\text{E.37})$$

($\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = g^{\nu\lambda} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\lambda = g^{\nu\lambda} g_{\mu\lambda} = \delta_\mu^\nu$) 及び, 式 (E.27), (E.26) より

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = \gamma^{-1} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x = \gamma^{-1} c \sinh \alpha_0 \cos \beta = \gamma^{-1} b \cos \beta \quad (\text{E.38})$$

となるから, 式 (E.36) の境界条件は

$$\partial_\alpha \phi(\alpha_0, \beta) = b A \omega \cos \beta \cos \omega t \quad (\text{E.39})$$

と整理される.

式 (E.35), (E.39) の境界条件を元にラプラス方程式を解く. ラプラス方程式の両辺を α で微分して, 式 (E.39) を用いると

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^3 \phi(\alpha_0, \beta) + \partial_\beta^2 \partial_\alpha \phi(\alpha_0, \beta) &= 0, \\ \therefore \partial_\alpha^3 \phi(\alpha_0, \beta) &= b A \omega \cos \beta \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

となり, ϕ を α で 1 回微分しても, 3 回微分しても変わらないことを意味するので

$$\phi(\alpha, \beta) = b A \omega e^{\pm(\alpha - \alpha_0)} \cos \beta \cos \omega t \quad (\text{E.41})$$

でなければならない。加えて、式 (E.35) より $\alpha \rightarrow \infty$ で ϕ は収束する必要があるため、負符号が選択され

$$\phi(\alpha, \beta) = bAw e^{\alpha_0 - \alpha} \cos \beta \cos \omega t \quad (\text{E.42})$$

が解となる。

続いて、楕円柱にかかる力を求めるために表面での応力 (圧力) を求める。理想流体なのでベルヌーイの定理 [39] が使えて

$$p(\alpha_0, \beta) = -\rho_w \frac{\partial \phi(\alpha_0, \beta)}{\partial t} - \frac{\rho_w}{2} \mathbf{v}^2(\alpha_0, \beta) = \rho_w bAw^2 \cos \beta \sin \omega t - \frac{\rho_w}{2} \mathbf{v}^2(\alpha_0, \beta) \quad (\text{E.43})$$

として圧力がわかる (ρ_w は水の密度)。ここで、流体の運動エネルギーの項は楕円柱表面で積分したとき、ダランベールのパラドクスより消滅するので [39] $\mathbf{v}(\alpha_0, \beta)$ は計算しなくてもよい。よって、楕円柱にかかる単位長さあたりの力の x 成分は (y 成分は系の対称性からゼロである)、

$$F_x = - \int_{\text{柱表面}} p(\alpha_0, \beta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x ds = -\rho_w b^2 Aw^2 \sin \omega t \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \beta d\beta = -\rho_w \pi b^2 Aw^2 \sin \omega t \quad (\text{E.44})$$

となる。(ちなみに、 $\mathbf{v}(\alpha_0, \beta)$ の成分は β の三角関数に比例するので、流体の運動エネルギーの項は 2 つの三角関数の積から構成される。従って、表面積分中では 3 つの三角関数が現れて消滅することからダランベールのパラドクスが確かめられる。) 最後に、この力を楕円柱の加速度 $-Aw^2 \sin \omega t$ で割って単位長さあたりの付加質量は

$$m_e = \rho_w \pi b^2 \quad (\text{E.45})$$

となり、半短軸 b のみに依存する。

F ペア遊泳時のエネルギー散逸率における横縞状の位相差依存性

図 89 におけるエネルギー散逸率 Θ の横縞状の位相差依存性について説明する。単独遊泳の場合、位相の確率分布は図 86 より

$$P(\phi) \approx \frac{1}{2\pi} + \epsilon \cos(2\phi + \gamma_P) \quad (\text{F.46})$$

と近似的に表すことができる。ここで $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ と γ_P は定数である。図 87 からエネルギー散逸率 $\Theta(\phi)$ も近似的に

$$\Theta(\phi) \approx \Theta_0 + E \cos(2\phi - \gamma_\Theta) \quad (\text{F.47})$$

と表される。ここで $\Theta_0 \sim \mathcal{O}(10^{-1})$, $E \sim \mathcal{O}(1)$, γ_Θ は定数である。このとき、エネルギー散逸率の期待値 μ_Θ はその定義式 (146) から

$$\mu_\Theta = \Theta_0 + \pi E \epsilon \cos(\gamma_P + \gamma_\Theta) \sim \mathcal{O}(10^{-2}) > 0, \quad (\text{F.48})$$

と見積もられる ($\cos(\gamma_P + \gamma_\Theta)$ は負の値である)。これは図 87 のインセットでの μ_Θ の値に一致する。

続いて、流体相互作用がない場合 ($C_T = 0$) のペア遊泳における位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ の確率分布を求める。確率分布は 2 匹の距離に依存しないので $\tilde{P}(\psi) := P(\psi; d_{\parallel})$ と書く。

ϕ_1 と ϕ_2 の対称性, 言い換えれば ψ と $-\psi$ の対称性を用いて, ϕ_1 と ϕ_2 の同時分布を以下のように変形する.

$$P(\phi_1)P(\phi_2) = P(\phi_1)\frac{1}{2}(P(\phi_1 + \psi) + P(\phi_1 - \psi)) =: P(\phi_1, \psi). \quad (\text{F.49})$$

$\phi_1 \in [-\pi, \pi]$ で $P(\phi_1, \psi)$ 積分すると, 位相差の確率分布

$$\tilde{P}(\psi) = \frac{1}{2\pi} + \pi\epsilon^2 \cos 2\psi. \quad (\text{F.50})$$

を得る. 従って, これは確率分布 $P(\psi; d_{\parallel})$ にも横縞状の位相差依存性が現れることを意味するが, $\epsilon^2 \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ のため極めて小さいことがわかる. 実際, 図 88 では観測されていない.

流体相互作用がない場合のエネルギー散逸率 $\tilde{\Theta}(\psi) := \Theta(\psi, d_{\parallel})$ を計算する. ψ が与えられたときの ϕ_1 の条件付き確率は $P(\phi_1, \psi)/\tilde{P}(\psi)$, であるため

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(\psi) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \Theta(\phi_1) \frac{P(\phi_1, \psi)}{\tilde{P}(\psi)} \\ &= \Theta_0 + \pi E \epsilon \cos(\gamma_P + \gamma_{\Theta})(1 + \cos 2\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \mu_{\Theta} + \pi E \epsilon \cos(\gamma_P + \gamma_{\Theta}) \cos 2\psi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{F.51})$$

を得る. 従って, $\Theta(\psi, d_{\parallel})$ は期待値 μ_{Θ} からの $\cos 2\psi$ に比例するようなずれを持つことになり, これが図 89 における横縞状の位相差依存性に対応する. また, エネルギー散逸率の位相差に対する期待値は

$$\langle \Theta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \tilde{\Theta}(\psi) \tilde{P}(\psi) = \mu_{\Theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{F.52})$$

となるため, ほとんど μ_{Θ} に等しいことがわかる. 図 90 における, 流体相互作用のない場合や距離が十分大きい場合の計算結果に一致する.

G 鉛直角直径の計算手法

式 (179) の鉛直角直径 $\delta_{ij}^{\perp}(\phi)$ を求めるために, 距離 $r_{ij}(\phi)$ を導出する. そのベクトルの関係式

$$\mathbf{r}_{ij}(\phi) = c_1 \boldsymbol{\varepsilon}_i(\phi) = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + c_2 \mathbf{e}_j \quad (\text{G.53})$$

を用いる. ここで, $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\phi) = (\cos(\theta_i + \phi), \sin(\theta_i + \phi))$ は個体 i の視線の方向の単位ベクトル, $\mathbf{e}_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ は相手個体 j の運動方向のベクトル, c_1 と c_2 は係数である. c_1 か c_2 がわかれば, $r_{ij}(\phi)$ が求まるため, この関係式を解くと (図 100(b) 参照)

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta_i - \theta_j + \phi)} \begin{bmatrix} -\sin \theta_j & \cos \theta_j \\ -\sin(\theta_i + \phi) & \cos(\theta_i + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{bmatrix} \quad (\text{G.54})$$

となる. c_1 を式 (G.53) に代入して,

$$r_{ij}(\phi) = |\mathbf{r}_{ij}(\phi)| = |c_1| = \left| \frac{(-\sin \theta_j, \cos \theta_j) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\sin(\theta_i - \theta_j + \phi)} \right| \quad (\text{G.55})$$

を得る.

続いて、 μ 番目のピンの中での最大鉛直角直径 $\delta_{ij,\mu}^\perp$ を求める。相手個体の頭尾の端に向かう単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}}$, $\mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}}$ と定め、それらは以下ようになる (図 100(c) 参照)。

$$\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \left(\frac{l_b}{2} - l_e\right) \mathbf{e}_j}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \left(\frac{l_b}{2} - l_e\right) \mathbf{e}_j\right|}, \quad \mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \left(\frac{l_b}{2} + l_e\right) \mathbf{e}_j}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \left(\frac{l_b}{2} + l_e\right) \mathbf{e}_j\right|} \quad (\text{G.56})$$

$\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}}$ と $\mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}}$ の内、自身から反時計回りに見て先に現れるベクトルを \mathbf{e}_{ij}^- , 次に現れるベクトルを \mathbf{e}_{ij}^+ と再定義する。式で表せば $(\mathbf{e}_{ij}^- \times \mathbf{e}_{ij}^+) \cdot \mathbf{e}_z > 0$ を満たすように、 $\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}}$, $\mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}}$ を \mathbf{e}_{ij}^- , \mathbf{e}_{ij}^+ に再ラベル付けする。例えば、図 100(c) の場合、 $\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}} = \mathbf{e}_{ij}^-$ と $\mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}} = \mathbf{e}_{ij}^+$ となる。この前準備の後、 \mathbf{e}_{ij}^\pm と \mathbf{e}_i のなす角度

$$\phi_{ij}^\pm = \text{sgn}((\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_{ij}^\pm) \cdot \mathbf{e}_z) \cos^{-1}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{ij}^\pm) \quad (\text{G.57})$$

を得る。ここで、 $\text{sgn}(o)$ は符号関数である。後は、相手個体 j を含む延長線に対して直行する単位ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi})$ と (図 100(b) 参照), \mathbf{e}_{ij}^- , \mathbf{e}_{ij}^+ の関係から、最大鉛直角直径 $\delta_{ij,\mu}^\perp$ が求められる。 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi})$ は

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi}) = \text{sgn}((\mathbf{e}_{ij}^{\text{an}} \times \mathbf{e}_{ij}^{\text{pos}}) \cdot \mathbf{e}_z) R_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_j, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.58})$$

と計算される。これらのベクトルに依存した符号を抽出する量 $s_{ij}^\pm = (\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi}) \times \mathbf{e}_{ij}^\pm) \cdot \mathbf{e}_z$ の正負によって、 $\delta_{ij,\mu}^\perp$ を求める過程に場合分けが生じる。

- 場合 1: $s_{ij}^+ > 0$ と $s_{ij}^- < 0$. この場合 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi})$ の延長線が相手個体 j の体と交わる。
 - 場合 1-1: μ 番目のピンが $\tilde{\phi}$ が含む場合 ($\tilde{\phi} \in [\phi_\mu - \delta_b^\parallel/2, \phi_\mu + \delta_b^\parallel/2]$ の場合), $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\tilde{\phi})$ となる。
 - case 1-2: それ以外では、 $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\phi')$ となる。ここで、 ϕ' は $\tilde{\phi}$ に近い方の μ 番目のピンの端の角度である。
- case 2: $s_{ij}^+ > 0$ と $s_{ij}^- > 0$. この場合 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi})$ の延長線が相手個体 j の延長線のマイナス側で交わる。
 - 場合 2-1: μ 番目のピンが ϕ_{ij}^- が含む場合 (相手個体のマイナス端がピンに含まれる場合) $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\phi_{ij}^-)$ となる。
 - case 2-2: それ以外では、 $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\phi')$ となる。
- case 3: $s_{ij}^+ < 0$ と $s_{ij}^- < 0$. この場合 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(\tilde{\phi})$ の延長線が相手個体 j の延長線のプラス側で交わる。この場合が図 100(b),(c) で示された状況である。
 - 場合 3-1: μ 番目のピンが ϕ_{ij}^+ が含む場合 (相手個体のプラス端がピンに含まれる場合) $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\phi_{ij}^+)$ となる。
 - case 3-2: それ以外では、 $\delta_{ij,\mu}^\perp = \delta_{ij}^\perp(\phi')$ となる。

H 個体の平均弧長 $\mathcal{D}(R)$ の導出

式 (214) に現れる分解能角度 Φ 内の距離 R にいる個体が占める平均弧長 $\mathcal{D}(R)$ の導出を行う。図 132 に示すように、方位角 $\phi \in [-\frac{\Phi}{2}, \frac{\Phi}{2}]$ を導入し、 $\mathcal{D}(R)$ を定義する：

$$\mathcal{D}(R) = \frac{1}{\Phi} \int_{-\frac{\Phi}{2}}^{\frac{\Phi}{2}} d\phi \tilde{D}(R, \phi) \quad (\text{H.59})$$

$\tilde{D}(R, \phi)$ は個体の中心が (R, ϕ) に位置する場合の Φ の中での弧長である。 $\tilde{D}(R, \phi)$ の関数形は距離 R により以下の場合に分けられる。

- $R < \frac{D}{2\Phi}$ の場合.

個体が任意の方位角 ϕ をとっても、角度幅 Φ は全て占められるため、その弧長は

$$\tilde{D}(R, \phi) = R\Phi \quad (\text{H.60})$$

となり、 ϕ で平均したのもも

$$\mathcal{D}(R) = R\Phi \quad (\text{H.61})$$

となる。

- $\frac{D}{2\Phi} < R < \frac{D}{\Phi}$ の場合.

個体が $\frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R} < \phi < -\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}$ をとる場合、 Φ は全て占められる。それ以外の場合は Φ の中に隙間が生じる。従って、線形補間を施して $\tilde{D}(R, \phi)$ は以下のようになる。

$$\tilde{D}(R, \phi) = \begin{cases} R\left(\phi + \frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right) & \left[\phi < \frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R}\right] \\ R\Phi & \left[\frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R} < \phi < -\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right] \\ R\left(-\phi + \frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right) & \left[\phi > -\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right] \end{cases} \quad (\text{H.62})$$

これを平均化して、

$$\mathcal{D}(R) = D \left(1 - \frac{D}{4R\Phi}\right) \quad (\text{H.63})$$

を得る。

- $R > \frac{D}{\Phi}$ の場合.

個体が任意の ϕ をとったとしても Φ が完全に占められることはない。 $-\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R} < \phi < \frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R}$ をとる場合は、個体の両側に隙間ができる。よって

$$\tilde{D}(R, \phi) = \begin{cases} R\left(\phi + \frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right) & \left[\phi < -\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right] \\ D & \left[-\frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R} < \phi < \frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R}\right] \\ R\left(-\phi + \frac{\Phi}{2} + \frac{D}{2R}\right) & \left[\phi > \frac{\Phi}{2} - \frac{D}{2R}\right] \end{cases} \quad (\text{H.64})$$

となり、平均化して

$$\mathcal{D}(R) = D \left(1 - \frac{D}{4R\Phi}\right), \quad (\text{H.65})$$

を得るが、これは式 (H.63) と同じものである。

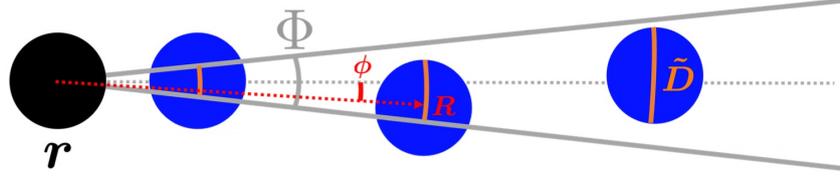


図 132: \tilde{D} の模式図. 左が $R < \frac{D}{2\Phi}$ の場合, 中央が $\frac{D}{2\Phi} < R < \frac{D}{\Phi}$ の場合, 右が $R > \frac{D}{\Phi}$ の場合を示す.

まとめると

$$\mathcal{D}(R) = \begin{cases} R\Phi & [R < R_D] \\ R_D\Phi \left(2 - \frac{R_D}{R}\right) & [R > R_D], \end{cases} \quad (\text{H.66})$$

を得る. ただし $R_D = D/(2\Phi)$ である. $R \rightarrow \infty$ の極限では個体が完全に収まるため, \mathcal{D} はゼロに収束する.

I 線形安定性解析の計算

線形安定性解析により式 (222) の各項をフーリエ展開して, 減衰率 $\Lambda_k(\mathbf{q})$ を得る計算過程を示す.

I.1 δf を含まない項の整理

初めに, δf を含まない項が相殺されて消滅することを示す.

$$-c\mathcal{I}f_0^{-2} \left(1 - \frac{\delta\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' K(\theta' - \theta) = -2\pi c\mathcal{I}f_0^{-2} \left(1 - \frac{\delta\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}}\right) K_0 \quad (\text{I.67})$$

$$c\mathcal{I}f_0^{-2} \left(1 - \frac{\delta\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \quad (\text{I.68})$$

の二項が相殺されることを以下で示す. 相殺されるためには式 (I.68) の積分項が $2\pi K_0$ に等しいことが示されればよい.

ボルツマン方程式の中では $\vartheta(\theta_1, \theta_2)$ は $\arg(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$ と定めていたが, フーリエ変換を偏角演算 $\arg(\circ)$ に対して正しく行うためには規格化が必要である. すなわち,

$$\vartheta(\theta_1, \theta_2) = \arg \left(\frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{|2 \cos(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})|} \right) \quad (\text{I.69})$$

と再定義する. このとき, 式 (I.68) の積分項は,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \sum_k K_k e^{ik(\theta_2 - \theta_1)} \sum_{k'} \hat{p}_{k'} e^{ik'(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2))} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \sum_k K_k e^{ik(\theta_2 - \theta_1)} \sum_{k'} \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \left(\frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{|2 \cos(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})|} \right)^{-k'} \end{aligned} \quad (\text{I.70})$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \sum_k K_k e^{ik(\theta_2 - \theta_1)} \sum_{k'} \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \left\{ \operatorname{sgn} \left(\cos \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \right) \right\}^{k'} e^{-i\frac{k'}{2}(\theta_1 + \theta_2)}$$

となる. (θ_1, θ_2) を変数変換して $(\Theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \Psi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2})$ を定める. 対応するヤコビアンは $d\theta_1 d\theta_2 = 2d\Theta d\Psi$ となる. これにより式 (I.70) を k' がゼロかどうかで分解して

$$\begin{aligned} & 2 \sum_k \sum_{k'} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{2ik\Psi} \{\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \int_{-\pi+|\Psi|}^{\pi-|\Psi|} d\Theta e^{-ik'\Theta} \quad (\text{I.71}) \\ &= 4 \sum_k K_k \hat{p}_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{2ik\Psi} (\pi - |\Psi|) \\ & \quad - 4 \sum_k \sum_{k' \neq 0} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{2ik\Psi} \{-\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \frac{\sin(k'|\Psi|)}{k'} \end{aligned}$$

となる. 式 (I.71) の第 1 項目の積分は $k \neq 0$ の場合にゼロとなるため, $k = 0$ の場合のみ考えて,

$$4 \sum_k K_k \hat{p}_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{2ik\Psi} (\pi - |\Psi|) = 4K_0 \hat{p}_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi (\pi - |\Psi|) = 4\pi^2 K_0 \hat{p}_0 = 2\pi K_0 \quad (\text{I.72})$$

となる. $\hat{p}(\theta)$ は確率分布のため, $2\pi \hat{p}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \hat{p}(\theta) = 1$ であることを利用した. 第 2 項目の積分は

$$\begin{aligned} & -4 \sum_k \sum_{k' \neq 0} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{2ik\Psi} \{-\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \frac{\sin(k'|\Psi|)}{k'} \quad (\text{I.73}) \\ &= -8 \sum_k \sum_{k' \neq 0} K_k \hat{p}_{k'} \frac{e^{ik'\theta}}{k'} \int_0^{\pi} d\Psi \cos(2k\Psi) \{-\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \sin(k'\Psi) \\ &= -8 \sum_k \sum_{k' \neq 0} K_k \hat{p}_{k'} \frac{e^{ik'\theta}}{k'} \int_0^{\pi} d\Psi \{-\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \frac{\sin((k' + 2k)\Psi) + \sin((k' - 2k)\Psi)}{2} \\ &= -4 \sum_k \sum_{k' \neq 0, \pm 2k} K_k \hat{p}_{k'} \frac{e^{ik'\theta}}{k'} \\ & \quad \times \int_0^{\pi} d\Psi \{-\operatorname{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \{\sin((k' + 2k)\Psi) + \sin((k' - 2k)\Psi)\} \\ &= -4 \sum_k \sum_{k' \neq 0, \pm 2k} K_k \hat{p}_{k'} \frac{e^{ik'\theta}}{k'} ((-1)^{k'} - 1) \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(k' + 2k))}{k' + 2k} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2}(k' - 2k))}{k' - 2k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. k' は奇数なので $\cos(\frac{\pi}{2}(k' \pm 2k)) = 0$ となることを利用した.

従って, 式 (I.68) は

$$\begin{aligned} & c\mathcal{I}f_0^{-2} \left(1 - \frac{\delta\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}} \right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \quad (\text{I.74}) \\ &= 2\pi c\mathcal{I}f_0^{-2} \left(1 - \frac{\delta\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)}{\mathcal{I}} \right) K_0 \end{aligned}$$

となるため、式 (I.67) と相殺される。よって、ボルツマン方程式 (222) は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta f(\mathbf{r}, \theta, t)}{\partial t} = & -v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) \\
& -s \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + s \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' p(\theta - \theta') \delta f(\mathbf{r}, \theta', t) \\
& -c \overline{\mathcal{I} f_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' K(\theta' - \theta) \\
& \times \left\{ \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta', t) \right\} \\
& + c \overline{\mathcal{I} f_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \\
& \times \left\{ \delta f(\mathbf{r}, \theta_2, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta_2, t) \right\}
\end{aligned} \tag{I.75}$$

とまとめられる。

1.2 空間積分の扱い

空間積分を含む項の取り扱いについて述べる。 $\overline{\mathcal{I} f_0}$ の表式を求める。 \mathcal{I} の表式を入れると

$$\overline{\mathcal{I} f_0} = \overline{f_0} \int d^2 \mathbf{R} B(R) G_0(R) = \rho_0 \int_0^{\infty} dR R e^{-\frac{R^2}{2R_0^2}} \exp\left(-\rho_0 \int_0^R dR' \mathcal{D}(R')\right) \tag{I.76}$$

となる。式 (H.66) より指数の中身の積分は

$$\int_0^R dR' \mathcal{D}(R') = \begin{cases} \frac{R^2}{2} \Phi & [R < R_D] \\ R_D^2 \Phi \left(-\frac{3}{2} + 2\frac{R}{R_D} + \ln\left(\frac{R_D}{R}\right)\right) & [R > R_D] \end{cases} \tag{I.77}$$

となるため、 $\overline{\mathcal{I} f_0}$ は

$$\overline{\mathcal{I} f_0} = \rho_0 \int_0^{R_D} dR R e^{-\rho_0 \left(\Phi + \frac{1}{\rho_0 R_0^2}\right) \frac{R^2}{2}} + \rho_0 \int_{R_D}^{\infty} dR R e^{-\frac{R^2}{2R_0^2}} e^{-\rho_0 R_D^2 \Phi \left\{-\frac{3}{2} + 2\frac{R}{R_D} + \ln\left(\frac{R_D}{R}\right)\right\}} \tag{I.78}$$

と 2 項に分けられる。第 1 項目は

$$\rho_0 \int_0^{R_D} dR R e^{-\rho_0 \left(\Phi + \frac{1}{\rho_0 R_0^2}\right) \frac{R^2}{2}} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\rho_0 R_D^2}{2} \left(\Phi + \frac{1}{\rho_0 R_0^2}\right)\right)}{\Phi + \frac{1}{\rho_0 R_0^2}} \tag{I.79}$$

と積分される。この式は $\rho_0 = 0$ でゼロとなり、 $\rho_0 \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{\Phi} \left(1 - \frac{1}{\rho_0 \Phi R_0^2}\right)$ に漸近して $1/\Phi$ に収束する。次に第 2 項目は

$$\begin{aligned}
& \rho_0 \int_{R_D}^{\infty} dR R e^{-\frac{R^2}{2R_0^2}} e^{-\rho_0 \Phi R_D^2 \left\{-\frac{3}{2} + 2\frac{R}{R_D} + \ln\left(\frac{R_D}{R}\right)\right\}} \\
& = \rho_0 R_D^2 \int_1^{\infty} d\xi \xi e^{-\frac{R_D^2}{2R_0^2} \xi^2} \left(e^{\frac{3}{2}\xi} \xi e^{-2\xi}\right)^{\rho_0 \Phi R_D^2}, \quad \xi = \frac{R}{R_D}
\end{aligned} \tag{I.80}$$

となる．これを解析的に計算するのは難しいが，大きさを見積もることは可能である． $e^{\frac{3}{2}\xi}e^{-2\xi}$ が $\xi = 1$ で最大値 $e^{-\frac{1}{2}}$ をとることより

$$\begin{aligned} & \rho_0 R_D^2 \int_1^\infty d\xi \xi e^{-\frac{R_D^2}{2R_0^2}\xi^2} \left(e^{\frac{3}{2}\xi} e^{-2\xi} \right)^{\rho_0 \Phi R_D^2} \\ & < \rho_0 R_D^2 e^{-\frac{1}{2}\rho_0 \Phi R_D^2} \int_1^\infty d\xi \xi e^{-\frac{R_D^2}{2R_0^2}\xi^2} = \rho_0 R_0^2 e^{-\frac{1}{2}\rho_0 \Phi R_D^2} e^{-\frac{R_D^2}{2R_0^2}} \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

と評価できる．これは $\rho_0 = 0$ でゼロとなり， $\rho_0 \rightarrow \infty$ で指数関数的にゼロに収束する．以上より， $\overline{\mathcal{I}f_0}$ は任意のパラメタで有限の値を持つことがわかる．遮蔽が起こらない点粒子極限 $R_D = 0$ ($G = 1$ の場合) では， $\overline{\mathcal{I}f_0}$ を解析的に計算することができ，

$$\overline{\mathcal{I}f_0} = \rho_0 \int_0^\infty dR R e^{-\frac{R^2}{2R_0^2}} = \rho_0 R_0^2 \quad (\text{I.82})$$

となる．

分布関数のフーリエ変換に伴い，式 (I.75) に出現する空間積分項

$$\frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} = \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{R} G_0(R) B(R) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \quad (\text{I.83})$$

を考える．この積分も解析的に計算するのは困難だが， $G_0(R)$ と $B(R)$ は距離 $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ の単調減少関数であることより

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) & \\ & := \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2 \mathbf{R} G_0(R) B(R) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \\ & = \frac{1}{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^\infty dR_x \int_{-\infty}^\infty dR_y G_0(R) B(R) \cos(q_x R_x) \cos(q_y R_y) \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

は $-1 < \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \leq 1$ の間の値を取ることが示される． $\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})$ は $\mathbf{q} = 0$ で最大値 $\hat{\mathcal{I}}(0) = 1$ を取り， $\mathbf{q} \rightarrow \infty$ では $\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$ に収束する．点粒子極限 $R_D = 0$ では解析的に計算でき，

$$\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) = e^{-\frac{q^2 R_0^2}{2}} \quad (\text{I.85})$$

q に関して単調減少な関数が得られる．

1.3 ボルツマン方程式のフーリエ成分

分布関数のフーリエ変換 (225) を式 (I.75) に代入したときのフーリエ成分 (k, \mathbf{q}) の各項について示す． $\vartheta(\theta_1, \theta_2)$ を含まない項からは

$$\frac{\partial \delta f(\theta, t)}{\partial t} \rightarrow -\Lambda_k(\mathbf{q}) \delta f_k(\mathbf{q}, t) \quad (\text{I.86})$$

$$-v_0 \mathbf{e}(\theta) \cdot \nabla \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) \rightarrow -\frac{v_0}{2} \{ (q_y + iq_x) \delta f_{k-1}(\mathbf{q}, t) - (q_y - iq_x) \delta f_{k+1}(\mathbf{q}, t) \} \quad (\text{I.87})$$

$$-s \delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + s \int_{-\pi}^\pi d\theta' p(\theta - \theta') \delta f(\mathbf{r}, \theta', t) \rightarrow s(2\pi p_k - 1) \delta f_k(\mathbf{q}, t) \quad (\text{I.88})$$

$$\begin{aligned}
& -c\mathcal{I}\overline{f_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' K(\theta' - \theta) \\
& \times \left(\delta f(\mathbf{r}, \theta, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2\mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta', t) \right) \\
& \rightarrow -2\pi c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(K_0 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) K_k \right) \delta f_k(\mathbf{q}, t)
\end{aligned} \tag{I.89}$$

というようにモード (k, \mathbf{q}) の項が抽出される。

$\vartheta(\theta_1, \theta_2)$ を含む項

$$\begin{aligned}
& c\mathcal{I}\overline{f_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 K(\theta_2 - \theta_1) \hat{p}(\theta - \vartheta(\theta_1, \theta_2)) \\
& \times \left(\delta f(\mathbf{r}, \theta_2, t) + \frac{1}{\mathcal{I}} \int d^2\mathbf{r}' G_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) B(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta f(\mathbf{r}', \theta_2, t) \right)
\end{aligned} \tag{I.90}$$

については、式 (I.68) で用いた計算過程と同様に計算される。フーリエ成分 \mathbf{q} の項は

$$\begin{aligned}
& 2c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k \sum_{k'} \sum_{k''} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k''}(\mathbf{q}, t) \\
& \times \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{i(2k+k'')\Psi} \{\text{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \int_{-\pi+|\Psi|}^{\pi-|\Psi|} d\Theta e^{-i(k'-k'')\Theta} \\
& = 4c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k \sum_{k'} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k'}(\mathbf{q}, t) \\
& \times \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{i(2k+k')\Psi} \{\text{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} (\pi - |\Psi|) \\
& - 4c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k \sum_{k'} \sum_{k'' \neq k'} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k''}(\mathbf{q}, t) (-1)^{k''} \\
& \times \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{i(2k+k'')\Psi} \{-\text{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} \frac{\sin((k' - k'')|\Psi|)}{k' - k''}
\end{aligned} \tag{I.91}$$

となるが、第2項目の積分については式 (I.73) と同じようにゼロになる。従って、第1項目の積分のみを場合分けして考える。

- $k' = -2k$ の場合.

$$\begin{aligned}
& 4c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k K_k \hat{p}_{-2k} e^{-2ik\theta} \delta f_{-2k}(\mathbf{q}, t) \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi (\pi - |\Psi|) \\
& = 4\pi^2 c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k K_k \hat{p}_{-2k} e^{-2ik\theta} \delta f_{-2k}(\mathbf{q}, t)
\end{aligned} \tag{I.92}$$

- $k' \neq -2k$ の場合.

$$\begin{aligned}
& 4c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k \sum_{k' \neq -2k} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k'}(\mathbf{q}, t) \\
& \times \int_{-\pi}^{\pi} d\Psi e^{i(2k+k')\Psi} \{\text{sgn}(\cos \Psi)\}^{k'} (\pi - |\Psi|) \\
& = 4c\mathcal{I}\overline{f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_k \sum_{k' \neq -2k} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k'}(\mathbf{q}, t) \\
& \times 2(-1)^k \left\{ \left(1 - (-1)^{k'} \right) \left(\frac{\pi \sin(k' \frac{\pi}{2})}{2} \frac{1}{2k + k'} - \frac{\cos(k' \frac{\pi}{2})}{(2k + k')^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{I.93}$$

$$\begin{aligned}
&= 4c\overline{\mathcal{I}f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \sum_k \sum_{k' \neq -2k} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k'}(\mathbf{q}, t) \times 2\pi(-1)^k \frac{(-1)^{\frac{k'-1}{2}}}{2k+k'} \delta_{k',\text{odd}} \\
&= 8\pi c\overline{\mathcal{I}f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \sum_k \sum_{k'} K_k \hat{p}_{k'} e^{ik'\theta} \delta f_{k'}(\mathbf{q}, t) \frac{(-1)^k (-1)^{\frac{k'-1}{2}}}{2k+k'} \delta_{k',\text{odd}}
\end{aligned}$$

従って、式 (I.90) のフーリエ成分 (k, \mathbf{q}) の項は

$$\rightarrow 2\pi c\overline{\mathcal{I}f_0} \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \sum_{k'} K_{k'} (2\pi \hat{p}_k) \delta f_k(\mathbf{q}, t) \left(\delta_{k, -2k'} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k'} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2k'+k} \delta_{k,\text{odd}} \right) \quad (\text{I.94})$$

となる。

1.4 減衰率の計算

以上より、フーリエ成分 (k, \mathbf{q}) の減衰率 $\Lambda_k(\mathbf{q})$ を求めることができる。式 (I.86, I.87, I.88, I.89, I.94) より、減衰率の実部は

$$\begin{aligned}
\text{Re } \Lambda_k(\mathbf{q}) &= s(1 - 2\pi p_k) + 2\pi c\overline{\mathcal{I}f_0} \quad (\text{I.95}) \\
&\quad \times \left\{ (K_0 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})K_k) \right. \\
&\quad \left. - 2\pi \hat{p}_k \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \sum_{k'} K_{k'} \left(\delta_{k, -2k'} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k'} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2k'+k} \delta_{k,\text{odd}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

となる。 $\text{Re } \Lambda_k(\mathbf{q}) < 0$ のとき、一様分布の分布関数が不安定化することを示す。

本表式を求めるにあたり、式 (I.87) 移流項を無視し、 $v_0 = 0$ の極限を考えた。これは、本研究での目的が転移点の導出にあり、移流項からくるモード $k \pm 1$ のクロスタームは転移点には影響を与えないことを考慮したによる。実際、移流項を省いたとしても局所 2 体衝突のモデルとの極限対応で矛盾は生じない。定性的に言えば、秩序の発生は長波長のモードから生じるため、転移点での解析に限れば移流項の空間微分は影響を与えない。

確率分布 $p(\theta)$ (と $\hat{p}(\theta)$) は、そのフーリエ成分が $0 < 2\pi p_k \leq 1$ を満たすものを採用する。例えば、von Mises 分布 $p(\theta) = e^{\kappa \cos \theta} / (2\pi I_0(\kappa))$ では、 $2\pi p_k = I_{|k|}(\kappa) / I_0(\kappa)$ は $0 < 2\pi p_k \leq 1$ を満たし、wrapped ガウス分布 $p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\theta+2\pi n)^2}{2\sigma^2}\right)$ では $2\pi p_k = e^{-\sigma^2 k^2 / 2}$ となるが、これも $0 < 2\pi p_k \leq 1$ を満たす。この条件により $c = 0$ で相互作用がない場合、減衰率は $\text{Re } \Lambda_k(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_k) \leq 0$ となるため、一様分布が安定であることが確かめられる。

計算を進めるために、 $K(\psi)$ の具体形 (218) を代入する。 $K(\psi) = \sqrt{2}|\sin \psi|$ に対して K_k は

$$K_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\delta_{k,\text{even}}}{1 - k^2} \quad (\text{I.96})$$

と計算され、式 (I.95) の関連項は

$$\begin{aligned}
&2\pi c\overline{\mathcal{I}f_0} \left\{ (K_0 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})K_k) \right. \\
&\quad \left. - 2\pi \hat{p}_k \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q})\right) \sum_{k'} K_{k'} \left(\delta_{k, -2k'} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k'} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2k'+k} \delta_{k,\text{odd}} \right) \right\} \quad (\text{I.97})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{2c\mathcal{I}f_0} \left\{ \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \frac{\delta_{k,\text{even}}}{1-k^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\pi\hat{p}_k \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \sum_{k'} \frac{\delta_{k',\text{even}}}{1-k'^2} \left(\delta_{k,-2k'} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k'}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2k'+k} \delta_{k,\text{odd}} \right) \right\} \\
&= 4\sqrt{2c\mathcal{I}f_0} \left\{ 1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \frac{\delta_{k,\text{even}}}{1-k^2} - 2\pi\hat{p}_k \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \left(\frac{\delta_{\frac{k}{2},\text{even}}}{1-\left(\frac{k}{2}\right)^2} + \frac{2\delta_{k,\text{odd}}}{4-k^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

と整理される．和の計算には

$$\begin{aligned}
&\sum_{k'=\text{even}} \frac{1}{(1-k'^2)(2k'+k)} \tag{I.98} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_1}{4} \frac{1}{n+\frac{k}{4}} - \frac{A_2}{2} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{A_3}{2} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \pi \left(\frac{A_1}{4} \cot\left(\pi\frac{k}{4}\right) - \frac{A_2}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{A_3}{2} \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
&= \pi \frac{A_1}{4} \cot\left(\pi\frac{k}{4}\right) = \frac{\pi}{4-k^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \\
&A_1 = \frac{4}{4-k^2}, \quad A_2 = \frac{2+k}{2(4-k^2)}, \quad A_3 = \frac{2-k}{2(4-k^2)} \tag{I.99}
\end{aligned}$$

を用いた．

よって，

$$\text{Re } \Lambda_k(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_k) + 4\sqrt{2c\mathcal{I}f_0} W_k(\mathbf{q}) \tag{I.100}$$

$$W_k(\mathbf{q}) := 1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \frac{\delta_{k,\text{even}}}{1-k^2} - 2\pi\hat{p}_k \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) \left(\frac{\delta_{\frac{k}{2},\text{even}}}{1-\left(\frac{k}{2}\right)^2} + \frac{2\delta_{k,\text{odd}}}{4-k^2} \right) \tag{I.101}$$

を得る．この方程式は k の符号に依存しないので， $-1 < \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \leq 1$ と $0 < 2\pi\hat{p}_k \leq 1$ も考慮して， $W_k(\mathbf{q})$ は以下のように場合分けできる．

- $k = 1$ の場合， $W_1(\mathbf{q}) = 1 - \frac{2}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right)$
- k が奇数で $k > 1$ ($k = 3, 5, 7, \dots$) の場合， $W_k(\mathbf{q}) = 1 + \frac{2}{k^2-4} (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) > 0$
- k が偶数で $\frac{k}{2}$ が奇数 ($k = 2, 6, 10, \dots$) の場合， $W_k(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{k^2-1} \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) > 0$
- k が偶数で $\frac{k}{2}$ も偶数 ($k = 4, 8, 12, \dots$) の場合， $W_k(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{k^2-1} \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) + \frac{2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2-1} (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) > 0$

従って， $\text{Re } \Lambda_k(\mathbf{q})$ が負になり得るのは $k = 1$ の場合のみであり，その減衰率は

$$\text{Re } \Lambda_1(\mathbf{q}) = s(1 - 2\pi p_1) - 4\sqrt{2c\mathcal{I}f_0} \left\{ \frac{2}{3} \times (2\pi\hat{p}_1) \left(1 + \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{q}) \right) - 1 \right\} \tag{I.102}$$

となる．

発表リスト

・原著論文

1. S. Ito and N. Uchida, Emergence of a Giant Rotating Cluster of Fish in Three Dimensions by Local Interactions, *J. Phys. Soc. Jpn.* **91**, 064806 (2022).
doi:10.7566/JPSJ.91.064806
(注目論文 (Editors' Choice) に選出)
2. S. Ito and N. Uchida, Effect of gravitational field on collective motion of fish, *EPL* **138**, 17001 (2022).
doi:10.1209/0295-5075/ac6621
3. S. Ito and N. Uchida, Vortex phase matching of a self-propelled model of fish with autonomous fin motion, *Phys. Fluids* **35**, 111902 (2023).
doi:10.1063/5.0173672
(注目論文 (Featured Article) に選出)
4. S. Ito and N. Uchida, Selective decision-making and collective behavior of fish by the motion of visual attention, *PNAS Nexus* **3**, pgae264 (2024).
doi:10.1093/pnasnexus/pgae264
5. S. Ito and N. Uchida, Boltzmann approach to collective motion via nonlocal visual interaction, *Phys. Rev. E* **111**, 044411 (2025).
doi:10.1103/PhysRevE.111.044411

・解説記事等

6. S. Ito and N. Uchida, Giant Vortices of Fish: Mechanisms and Patterns, *JPS Hot Topics* **2**, 025 (2022). (doi:10.7566/JPSHT.2.025)
7. 伊藤将, 内田就也, トポロジカル相互作用による巨大な回転魚群の形成機構, 日本物理学会誌 **78**, 198 (2023). (doi:10.11316/butsuri.78.4.198) (表紙絵に選出)

・国際会議, 国内学会における口頭発表

- S. Ito and N. Uchida, Formation of a giant rotating cluster of fish in three dimensions by local interactions, *Biofluid Symposium (RIMS Research Project Biofluids 2021)*, Japan, June 2021.
- 伊藤将, 内田就也, 魚の集団運動における重力場の効果, 日本物理学会 2023 年春季大会, 25aM1-2, オンライン大会, 2023 年 3 月.
- 伊藤将, 自己駆動粒子を用いた魚群モデルの構築, 第 20 回 Young Soft Webinar, 2023 年 7 月. (招待講演)
- 伊藤将, 内田就也, 逆カルマン渦を介した魚間流体相互作用の平板翼による自己推進モデル, 日本物理学会 第 78 回年次大会, 17aB202-12, 仙台, 2023 年 9 月.(学生優秀発表賞 (領域 12) を受賞)
- 伊藤将, 内田就也, 視線上の局所的視覚情報を用いた魚の集団運動モデル, 日本物理

学会 2024 年春季大会, 18pM1-1, オンライン大会, 2024 年 3 月.

- 伊藤将, 内田就也, 非局所な視覚相互作用を介した集団運動のボルツマン方程式の構築, 日本物理学会 第 79 回年次大会, 17aE313-8, 札幌, 2024 年 9 月.
- 伊藤将, 内田就也, 平板翼による魚の自己推進モデルの構築と逆カルマン渦を介した魚間相互作用の数値解析, 流体力学会年会 2024, 生物流体 1M508-11-01, 仙台, 2024 年 9 月.
- 伊藤将, 魚の集団運動のモデル化～現象論・流体・視覚～, Biofluid Workshops 2024 年度研究集会「生物流体力学における運動・行動の機構」, 京都, 2024 年 10 月. (招待統合講演)
- S. Ito and N. Uchida, Selective decision-making and collective motion of fish by visual attention, International Active Matter Workshop 2025, Japan, January 2025.
- 伊藤将, 内田就也, 非局所的視覚相互作用を介した集団運動のボルツマン方程式による転移現象, 日本物理学会 2025 年春季大会, 20aL1-1, オンライン大会, 2025 年 3 月.(学生優秀発表賞 (領域 11) を受賞)
- S. Ito, The role of the visual information of fish schooling via selective decision-making, iTHEMS biology seminar, Japan, May 2025. (招待講演)

・国際会議, 国内学会におけるポスター発表

- 伊藤将, 内田就也, 魚の回転する巨大な群れの局所相互作用を用いたモデル, 日本物理学会 第 77 回年次大会, 18pPSM-7, オンライン大会, 2022 年 3 月.
- S. Ito and N. Uchida, Modeling of giant vortices of fish by topological interaction, STATPHYS28, Japan, August 2023.
- S. Ito and N. Uchida, Selective decision making and collective motion of fish via visual attention, Dynamics Days Asia Pacific 13 (YKIS2024), Japan, July 2024.
- S. Ito and N. Uchida, Selective decision-making and collective motion induced by the visual attention of fish, 11th International Conference Engineering of Chemical Complexity (ECC11), Japan, July 2025.

・プレスリリース

- 東北大学プレスリリース, 魚は協調的な運動で省エネルギー遊泳を実現 一渦を介した尾ヒレの同期とエネルギー消費の関係を解明—, Two Fins are Better than One: Fish Synchronize Tail Fins to Save Energy, 2023 年 11 月 6 日.
- 東北大学プレスリリース, 魚の群れにおける視覚運動の役割を解明 一選択と集中によるダイナミックな群れの変形—, See Less to Move Better: Dynamic Schooling of Fish by Visual Selection and Focus, 2024 年 7 月 24 日.

参考文献

- [1] T. Vicsek and A. Zafeiris, *Phys. Rep.* **517**, 71 (2012).
- [2] L. Conradt and T. J. Roper, *Trends Ecol. Evol.* **20**, 449 (2005).
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Butterworth-Heinemann, New York, 1980).
- [4] J. Delcourt, N. W. F. Bode, and M. Denoël, *Q. Rev. Biol.* **91**, 1 (2016).
- [5] S. B. Rosenthal, C. R. Twomey, A. T. Hartnett, H. S. Wu, and I. D. Couzin, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 4690 (2015).
- [6] K. Terayama, H. Hioki, and M. Sakagami, *Int. J. Semant. Comput.* **9**, 143 (2015).
- [7] J. K. Parrish, S. V. Viscido, and D. Grünbaum, *Biol. Bull.* **202**, 296 (2002).
- [8] U. Lopez, J. Gautrais, I. D. Couzin, and G. Theraulaz, *Interface Focus* **2**, 693 (2012).
- [9] D. Nishiguchi, K. H. Nagai, H. Chaté, and M. Sano, *Phys. Rev. E* **95**, 020601(R) (2017).
- [10] M. Doi, *Soft Matter Physics*, (Oxford University Press, New York, 2013).
- [11] H. Chaté, F. Ginelli, and R. Montagne, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 180602 (2006).
- [12] I. H. Riedel, K. Kruse, and J. Howard, *Science* **309**, 300 (2005).
- [13] Y. Sumino, K. H. Nagai, Y. Shitaka, D. Tanaka, K. Yoshikawa, H. Chaté, and K. Oiwa, *Nature* **483**, 448 (2012).
- [14] H. Wioland, F. G. Woodhouse, J. Dunkel, J. O. Kessler, and R. E. Goldstein, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 268102 (2013).
- [15] H. Wioland, F. G. Woodhouse, J. Dunkel, and R. E. Goldstein, *Nat. Phys.* **12**, 341 (2016).
- [16] K. Tunstrøm, Y. Katz, C. C. Ioannou, C. Huepe, M. J. Lutz, and I. D. Couzin, *PLOS Comput. Biol.* **9**, e1002915 (2013).
- [17] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1226 (1995).
- [18] A. L. Koch and D. White, *Bioessays* **20**, 1030 (1998).
- [19] A. Walther and A. H. E. Müller, *Soft Matter* **4**, 663 (2008).
- [20] C. W. Reynolds, *Comput. Graph.* **21**, 25 (1987).
- [21] I. Theurkauff, C. Cottin-Bizonne, J. Palacci, C. Ybert, and L. Bocquet, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 268303 (2012).
- [22] D. Nishiguchi, J. Iwasawa, H. Jiang, and M. Sano, *New J. Phys.* **20**, 015002 (2018).
- [23] T. Zhang, D. Lyu, W. Xu, X. Feng, R. Ni, and Y. Wang, *Nat. Commun.* **14**, 8494 (2023).
- [24] H. Levine, W. J. Rappel, and I. Cohen, *Phys. Rev. E* **63**, 017101 (2000).
- [25] M. R. D’Orsogna, Y. L. Chuang, A. L. Bertozzi, and L. S. Chayes, *Phys. Rev.*

- Lett.* **96**, 104302 (2006).
- [26] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (CRC Press, Boca Raton, 2018).
- [27] H. Nishimori and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 2010).
- [28] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics* (Butterworth-Heinemann, New York, 1981).
- [29] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 445001 (2009).
- [30] J. Toner and Y. Tu, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4326 (1995).
- [31] J. Toner and Y. Tu, *Phys. Rev. E* **58**, 4828 (1998).
- [32] H. Chaté, F. Ginelli, G. Grégoire, and F. Raynaud, *Phys. Rev. E* **77**, 046113 (2008).
- [33] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, *Physica D* **181**, 157 (2003).
- [34] G. Grégoire and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 025702 (2004).
- [35] C. M. Breder, *Zoologica* **4**, 159 (1926).
- [36] C. C. Lindsey, *Fish Physiol.* **7**, 1 (1978).
- [37] M. Sfakiotakis, D. M. Lane, and J. B. C. Davies, *IEEE J. Ocean. Eng.* **24**, 237 (1999).
- [38] G. V. Lauder and E. D. Tytell, *Fish Physiol.* **23**, 425 (2005).
- [39] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, New York, 1987).
- [40] M. Gazzola, M. Argentina, and L. Mahadevan, *Nat. Phys.* **10**, 758 (2014).
- [41] G. S. Triantafyllou, M. S. Triantafyllou, and M. A. Grosenbaugh, *J. Fluids Struct.* **7**, 205 (1993).
- [42] G. K. Taylor, R. L. Nudds, and A. L. R. Thomas, *Nature* **425**, 707 (2003).
- [43] P. W. Webb, *J. Exp. Biol.* **55**, 489 (1971).
- [44] R. Bainbridge, *J. Exp. Biol.* **35**, 109 (1958).
- [45] J. R. Hunter and J. R. Zweifel *Fish. Bull.* **69**, 253 (1971).
- [46] P. W. Webb, P. T. KostECKI, and E. Don Stevens, *J. Exp. Biol.* **109**, 77 (1984).
- [47] O. Akanyeti, J. Putney, Y. R. Yanagitsuru, G. V. Lauder, W. J. Stewart, and J. C. Liao, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **114**, 13828 (2017).
- [48] G. Li, H. Liu, U. K. Müller, C. J. Voesenek, and J. L. van Leeuwen, *Proc. R. Soc. B* **288**, 20211601 (2021).
- [49] R. Bainbridge, *J. Exp. Biol.* **40**, 23 (1963).
- [50] M. Nagai, *Nagare* **10**, 47 (1979).
- [51] T. Y. Wu, in *Scale Effects in Animal Locomotion*, ed. T. J. Pedley (Academic Press, New York, 1977) pp. 203.
- [52] C. Katopodis and R. Gervais, *River Res. Appl.* **28**, 444 (2012).
- [53] K. Tsukamoto, *Bull. Jpn. Soc. Sci. Fish.* **50**, 2025 (1984).

- [54] D. W. Liu and M. Westerfield, *J. Physiol.* **403**, 73 (1988).
- [55] B. C. Jayne and G. V. Lauder, *J. Comp. Physiol. A* **173**, 495 (1993).
- [56] B. C. Jayne and G. V. Lauder, *J. Comp. Physiol. A* **175**, 123 (1994).
- [57] M. A. B. Schwalbe, A. L. Boden, T. N. Wise, and E. D. Tytell, *Sci. Rep.* **9**, 8088 (2019).
- [58] J. P. Gabriel, J. Ausborn, K. Ampatzis, R. Mahmood, E. Eklöf-Ljunggren, and A. El Manira, *Nat. Neurosci.* **14**, 93 (2011).
- [59] K. Ampatzis, J. Song, J. Ausborn, and A. El Manira, *J. Neurosci.* **33**, 10875 (2013).
- [60] S. Grillner, *Neuron* **52**, 751 (2006).
- [61] J. Song, I. Pallucchi, J. Ausborn, K. Ampatzis, M. Bertuzzi, P. Fontanel, L. D. Picton, and A. El Manira, *Neuron* **105**, 1048 (2020).
- [62] J. M. Wakeling, *Fish Physiol.* **23**, 333 (2005).
- [63] P. W. Webb, *J. Exp. Biol.* **74**, 211 (1978).
- [64] P. Domenici and R. W. Blake, *J. Exp. Biol.* **200**, 1165 (1997).
- [65] I. L. Y. Spierts and J. L. van Leeuwen, *J. Exp. Biol.* **202**, 393 (1999).
- [66] G. V. Lauder and E. G. Drucker, *News Physiol. Sci.*, **17**, 235 (2002).
- [67] E. G. Drucker and G. V. Lauder, *J. Exp. Biol.* **202**, 2393 (1999).
- [68] T. N. Wise, M. A. B. Schwalbe, and E. D. Tytell, *J. Exp. Biol.* **221**, jeb190892 (2018).
- [69] D. B. Gaiotti and F. Stel, *The Rankine vortex model*, University of Trieste-International Centre for Theoretical Physics (2006).
- [70] B. L. Partridge and T. Pitcher, *J. Comp. Physiol.* **135**, 315 (1980).
- [71] R. Harpaz, M. N. Nguyen, A. Bahl, and F. Engert, *Nat. Commun.* **12**, 6578 (2021).
- [72] J. C. Liao, D. N. Beal, G. V. Lauder, and M. S. Triantafyllou, *Science* **302**, 1566 (2003).
- [73] J. Mogdans, *J. Fish Biol.* **95**, 53 (2019).
- [74] M. Haehnel-Taguchi, O. Akanyeti, and J. C. Liao, *J. Neurophysiol.* **112**, 1329 (2014).
- [75] L. Li, M. Nagy, J. M. Graving, J. Bak-Coleman, G. Xie, and I. D. Couzin, *Nat. Commun.* **11**, 5408 (2020).
- [76] Y. Katz, K. Tunström, C. C. Ioannou, C. Huepe, and I. D. Couzin, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **108**, 18720 (2011).
- [77] J. E. Herbert-Read, A. Perna, R. P. Mann, T. M. Schaerf, D. J. T. Sumpter, and A. J. W. Ward, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **108**, 18726 (2011).
- [78] D. S. Calovi, A. Litchinko, V. Lecheval, U. Lopez, A. P. Escudero, H. Chaté, C. Sire, and G. Theraulaz, *PLOS Comput. Biol.* **14**, e1005933 (2018).
- [79] D. Zada, L. Schulze, J. Yu, P. Tarabishi, J. L. Napoli, J. Milan, and M. Lovett-Barron, *Curr. Biol.* **34**, 3380 (2024).

- [80] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, and V. Zdravkovic, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **105**, 1232 (2008).
- [81] A. Cavagna, A. Cimarelli, I. Giardina, G. Parisi, R. Santagati, F. Stefanini, and M. Viale, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **107**, 11865 (2010).
- [82] W. Bialek, A. Cavagna, J. Giardina, T. Morad, E. Silvestri, M. Viale, and A. M. Walczak, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **109**, 4786 (2012).
- [83] J. J. Faria, J. R. G. Dyer, R. O. Clément, I. D. Couzin, N. Holt, A. J. W. Ward, D. Waters, and J. Krause, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **64**, 1211 (2010).
- [84] J. Gautrais, F. Ginelli, R. Fournier, S. Blanco, M. Soria, H. Chaté, and G. Theraulaz, *PLoS Comput. Biol.* **8**, e1002678 (2012).
- [85] J. R. Hunter, *Anim. Behav.* **17**, 507 (1969).
- [86] D. Radakov, *Schooling in the Ecology of Fish* (Wiley, New York, 1973).
- [87] J. Godin and M. J. Morgan, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **16**, 105 (1985).
- [88] C. M. Breder, *Zoologica* **50**, 97 (1965).
- [89] D. Weihs, *Nature* **241**, 290 (1973).
- [90] J. P. Badgerow and F. R. Hainsworth, *J. Theor. Biol.* **93**, 41 (1981).
- [91] B. L. Partridge and T. J. Pitcher, *Nature* **279**, 418 (1979).
- [92] S. Marras, S. S. Killen, J. Lindström, D. J. McKenzie, J. F. Steffensen, and P. Domenici, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **69**, 219 (2014).
- [93] I. Ashraf, R. Godoy-Diana, J. Halloy, B. Collignon, and B. Thiria, *J. R. Soc. Interface* **13**, 20160734 (2016).
- [94] I. Ashraf, H. Bradshawa, T. Ha, J. Halloy, R. Godoy-Diana, and B. Thiria, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **114**, 9599 (2017).
- [95] D. Pita, B. A. Moore, L. P. Tyrrell, and E. Fernández-Juricic, *PeerJ* **3**, e1113 (2015).
- [96] T. Baden, T. Euler, and P. Berens, *Nat. Rev. Neurosci.* **21**, 5 (2020).
- [97] J. S. Diamond, *Annu. Rev. Vis. Sci.* **3**, 1 (2017).
- [98] R. W. Rodieck, *Vision Res.* **5**, 583 (1965).
- [99] D.M. Guthrie, *The Behaviour of Teleost Fishes* (Springer, Boston, 1986).
- [100] G. Kawamura, A. Kabayama, and T. Yonemori, *Bull. Jpn. Soc. Sci. Fish.* **44**, 567 (1978).
- [101] A. Kabayama, G. Kawamura, and T. Yonemori, *Bull. Jpn. Soc. Sci. Fish.* **45**, 1481 (1979).
- [102] I. H. Bianco and F. Engert, *Curr. Biol.* **25**, 831 (2015).
- [103] J. Johnston, S-H. Seibel, L. S. A. Darnet, S. Renninger, M. Orger, and L. Lagnado, *Neuron* **102**, 1211 (2019).
- [104] T. Euler, P. B. Detwiler, and W. Denk, *Nature* **418**, 8345 (2002).
- [105] V. H. Sridhar, J. D. Davidson, C. R. Twomey, M. M. G. Sosna, M. Nagy, and I. D. Couzin, *Phil. Trans. R. Soc. B* **378**, 20220062 (2023).

- [106] A. Muto, M. Ohkura, G. Abe, J. Nakai, and K. Kawakami, *Curr. Biol.* **23**, 307 (2013).
- [107] R. Harpaz, M. N. Nguyen, A. Bahl, and F. Engert, *Nat. Commun.* **12**, 6578 (2021).
- [108] R. Dukas, *Cognitive Ecology: The Evolutionary Ecology of Information Processing and Decision Making* (University of Chicago Press, Chicago, 1998)
- [109] A. W. Hein, *Curr. Opin. Neurobiol.* **74**, 102551 (2022).
- [110] H. A. Burgess, H. Schoch, and M. Granato, *Curr. Biol.* **20**, 381 (2010).
- [111] V. H. Sridhar, L. Li, D. Gorbonos, M. Nagy, B. R. Schell, T. Sorochkin, N. S. Gov, and I. D. Couzin, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **118**, e2102157118 (2021).
- [112] J. Jhawar, R. G. Morris, U. R. Amith-Kumar, M. D. Raj, T. Rogers, H. Rajendran, and V. Guttal, *Nat. Phys.* **16**, 488 (2020).
- [113] C. M. Breder, *Ecology* **35**, 361 (1954).
- [114] H. Niwa, *J. Theor. Biol.* **171**, 123 (1994).
- [115] N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, and M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3870 (1996).
- [116] 伊藤将, 内田就也, *日本物理学会誌* **78**, 198 (2023).
- [117] I. Aoki, *Bull. Jpn. Soc. Sci. Fish.* **48**, 1081 (1982).
- [118] A. Huth and C. Wissel, *J. Theor. Biol.* **156**, 365 (1992).
- [119] A. Huth and C. Wissel, *Ecol. Model.* **75**, 135 (1994).
- [120] N. H. P. Nguyen, E. Jankowski, and S. C. Glotzer, *Phys. Rev. E* **86**, 011136 (2012).
- [121] Y. L. Chuang, T. Chou, and M. R. D’Orsogna, *Phys. Rev. E* **93**, 043112 (2016).
- [122] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Butterworth-Heinemann, New York, 1981).
- [123] Z. Cheng, Z. Chen, T. Vicsek, D. Chen, and H. T. Zhang, *New J. Phys.* **18**, 103005 (2016).
- [124] I. D. Couzin, J. Krause, R. James, G. D. Ruxton, and N. R. Franks, *J. Theor. Biol.* **218**, 1 (2002).
- [125] A. Costanzo and C. K. Hemelrijk, *J. Phys. D* **51**, 134004 (2018).
- [126] A. Costanzo, *EPL* **125**, 20008 (2019).
- [127] A. Costanzo, E. van Haeringen, and C. K. Hemelrijk, *EPL* **138**, 22002 (2022).
- [128] D. Strömbom, *J. Theor. Biol.* **283**, 145 (2011).
- [129] L. Barberis and F. Peruani, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 248001 (2016).
- [130] D. Strömbom, M. Siljestam, J. Park, and D. J. T. Sumpter, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **224**, 3311 (2015).
- [131] D. S. Calovi, U. Lopez, S. Ngo, C. Sire, H. Chaté, and G. Theraulaz, *New J. Phys.* **16**, 015026 (2014).
- [132] A. Filella, F. Nadal, C. Sire, E. Kanso, and C. Eloy, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 198101 (2018).

- [133] J. Deng and D. Liu, *Bioinspir. Biomim.* **16**, 046013 (2021).
- [134] A. A. Tchieu, E. Kanso, and P. K. Newton, *Proc. R. Soc. A* **468**, 3006 (2012).
- [135] D. J. G. Pearce, A. M. Miller, G. Rowlands, and M. S. Turner, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **111**, 10422 (2014).
- [136] R. Bastien and P. A. Romanczuk, *Sci. Adv.* **6**, eaay0792 (2020).
- [137] S. Ito and N. Uchida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **91**, 064806 (2022).
- [138] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge university press, New York, 1992).
- [139] J. J. Videler and C. S. Wardle, *Rev. Fish Biol. Fish* **1**, 23 (1991).
- [140] E. D. Tytell, *Proc. R. Soc. Lond. B* **271**, 2535 (2004).
- [141] B. L. Partridge, T. Pitcher, J. M. Cullen, and J. Wilson, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **6**, 277 (1980).
- [142] <https://sites.google.com/view/movies-arxiv210605892>.
- [143] O. A. Misund, *Aquat. Living Resour.* **6**, 235 (1993).
- [144] S. Ito and N. Uchida, *EPL* **138**, 17001 (2022).
- [145] T. Schulz-Mirbach, F. Ladich, M. Plath, and M. He, *Biol. Rev.* **94**, 457 (2019).
- [146] C. K. Hemelrijk and H. Hildenbrandt, *Ethology* **114**, 245 (2008).
- [147] <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/ac6621/data>
- [148] D. Bumman, J. Krause, and D. Rubenstein, *Behaviour* **134**, 1063 (1997).
- [149] P. E. Smith, in *Proceedings of an International Symposium on Biological Sound Scattering in the Ocean*, ed. G. B. Farquhar (Department of the Navy, Washington, D.C., 1970) pp. 563.
- [150] T. J. Pitcher and B. L. Partridge, *Mar. Biol.* **54**, 383 (1979).
- [151] G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **214**, 158 (1952).
- [152] M. J. Lighthill, *J. Fluid Mech.* **9**, 305 (1960).
- [153] K. Wendel, *Hydrodynamic Masses and Hydrodynamic Moments of Inertia* (MIT Libraries, Cambridge, 1956).
- [154] A. Azuma, *The Biokinetics of Flying and Swimming* (Springer, Tokyo, 1992).
- [155] M. Nagai, I. Teruya, K. Uechi, and T. Miyazato, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. B* **62**, 200 (1996).
- [156] M. Hirayama, T. Nagamatsu, and K. Ueda, *Mem. Fac. Fish. Kagoshima Univ.* **49**, 17 (2000).
- [157] M. Gazzola, M. Argentina, and L. Mahadevan, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 3874 (2015).
- [158] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, A. M. Kosevich, and L. P. Pitaevskii, *Theory of Elasticity* (Butterworth-Heinemann, New York, 1986).
- [159] A. A. Tchieu, E. Kanso, and P. K. Newton, *Proc. R. Soc. A* **468**, 3006 (2012).
- [160] M. Gazzola, A. A. Tchieu, D. Alexeev, A. de Brauer, and P. Koumoutsakos, *J. Fluid Mech.* **789**, 726 (2016).
- [161] C. K. Hemelrijk, D. A. P. Reid, H. Hildenbrandt, and J. T. Padding, *Fish. Fish.*

- 16**, 511 (2015).
- [162] M. Daghooghi and I. Borazjani, *Bioinspir. Biomim.* **10**, 056018 (2015).
- [163] A. P. Maertens, A. Gao, and M. S. Triantafyllou, *J. Fluid Mech.* **813**, 301 (2017).
- [164] G. Li, D. Kolomenskiy, H. Liu, B. Thiria, and R. Godoy-Diana, *PLOS ONE* **14**, e0215265 (2019).
- [165] P. A. Dewey, D. B. Quinn, B. M. Boschitsch, and A. J. Smits, *Phys. Fluids* **26**, 041903 (2014).
- [166] B. M. Boschitsch, P. A. Dewey, and A. J. Smits, *Phys. Fluids* **26**, 051901 (2014).
- [167] A. D. Becker, H. Masoud, J. W. Newbolt, M. Shelley, and L. Ristroph, *Nat. Commun.* **6**, 97 (2015).
- [168] J. W. Newbolt, J. Zhang, and L. Ristroph, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **46**, 2419 (2019).
- [169] X. Zhu, G. He, and X. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 238105 (2014).
- [170] S. G. Park and H. J. Sung, *J. Fluid Mech.* **840**, 154 (2018).
- [171] Z. Peng, H. Huang, and X. Lu, *J. Fluid Mech.* **849**, 1068 (2018).
- [172] A. U. Oza, L. Ristroph, and M. J. Shelley, *Phys. Rev. X* **9**, 041024 (2019).
- [173] S. Ito and N. Uchida, *Phys. Fluids* **35**, 111902 (2023).
- [174] R. E. Jones, R. J. Petrell, and D. Pauly, *Aquac. Eng.* **20**, 216 (1999).
- [175] M. J. McHenry, C. A. Pell, and J. H. Long Jr, *J. Exp. Biol.* **198**, 2293 (1995).
- [176] Ö. Ekeberg and S. Grillner, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B* **354**, 895 (1999).
- [177] K. Matsuoka, *Biol. Cybern.* **104**, 297 (2011).
- [178] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, *Phys. Rev.* **36**, 823 (1930).
- [179] T. Schnipper, A. Andersen, and T. Bohr, *J. Fluid Mech.* **633**, 411 (2009).
- [180] N. Agre, S. Childress, J. Zhang, and L. Ristroph, *Phys. Rev. Fluids* **1**, 033202 (2016)
- [181] X. Ortiz, D. Rival, and D. Wood, *Energies* **8**, 2438 (2015).
- [182] H. Jiang, Y. Li, and Z. Cheng, *Appl. Mech. Mater.* **518**, 161 (2014).
- [183] C. E. Brennen, *A Review of Added Mass and Fluid Inertial Forces* (Naval Civil Engineering Laboratory, Port Hueneme, 1982).
- [184] G. Di Ilio, D. Chiappini, S. Ubertini, G. Bella, S. Succi, *Comput. Fluids* **166**, 200 (2018).
- [185] T. Tandler, E. Gellman, D. De La Cruz, and D. J. Ellerby, *J. Fish Biol.* **94**, 532 (2019).
- [186] J. C. Nauen and G. V. Lauder, *J. Exp. Biol.* **205**, 1709 (2002).
- [187] H. P. McKean, *Stochastic Integrals* (Academic Press, New York, 1969).
- [188] 田中一朗, 永井實, 抵抗と推進の流体力学 (シップ・アンド・オーシャン財団, 東京, 1996).
- [189] D. N. Joanes and C. A. Gill, *J. R. Stat. Soc. (Ser. D)* **47**, 183 (1998).
- [190] G. J. Elfring and E. Lauga, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 088101 (2009).
- [191] W. Liao and E. Lauga, *Phys. Rev. E* **103**, 042419 (2021).

- [192] B. Collignon, A. Séguret, and J. Halloy, A stochastic vision-based model inspired by zebrafish collective behaviour in heterogeneous environments. *R. Soc. open sci.* **3**, 150473 (2016).
- [193] L. Oscar, L. Li, D. Gorbonos, I. D. Couzin, and N. S. Gov, A simple cognitive model explains movement decisions in zebrafish while following leaders. *Phys. Biol.* **20**, 045002 (2023).
- [194] D. Gorbonos, N. S. Gov, and I. D. Couzin, Geometrical structure of bifurcations during spatial decision-making. *PRX Life* **2**, 013008 (2024).
- [195] S. Ito and N. Uchida, *PNAS Nexus* **3**, pgae264 (2024).
- [196] J. Qi, L. Bai, Y. Wei, H. Zhang, and Y. Xiao, *IEEE Internet Things J.* **10**, 10368 (2023).
- [197] <https://academic.oup.com/pnasnexus/article/3/7/pgae264/7703205?login=false#supplementary-data>
- [198] J. D. Davidson, M. M. G. Sosna, C. R. Twomey, V. H. Sridhar, S. P. Leblanc, and I. D. Couzin, Collective detection based on visual information in animal groups. *J. R. Soc. Interface* **18**, 20210142 (2021).
- [199] A. Peshkov, S. Ngo, E. Bertin, H. Chaté, and F. Ginelli, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 098101 (2012).
- [200] E. Bertin, A. Baskaran, H. Chaté, and M. C. Marchetti, *Phys. Rev. E* **92**, 042141 (2015).
- [201] A. Patelli, I. Djafer-Cherif, I. S. Aranson, E. Bertin, and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 258001 (2019).
- [202] S. Ito and N. Uchida, *Phys. Rev. E* **111**, 044411 (2025).
- [203] H. Chaté, F. Ginelli, G. Grégoire, and F. Raynaud, *Phys. Rev. E* **77**, 046113 (2008).
- [204] Ch. Becco, N. Vandewalle, J. Delcourt, P. Poncin, *Physica A* **367**, 487 (2006).
- [205] P. Suchandra and S. Raayai-Ardakani, *Phys. Fluids* **36**, 011909 (2024).
- [206] S. Fujiwara, *Journal of Aero Aqua Bio-mechanisms* **11**, 1 (2025).
- [207] D. Castro, C. Eloy, and F. Ruffier, *Bioinspir. Biomim.* **20**, 026006 (2025).
- [208] N. E. Huang and S. S. P. Shen, *Hilbert-Huang Transform and Its Applications* (World Scientific, Singapore, 2014).

謝辞

皆さまから多くのご助言とご支援を賜り、本研究を遂行することができました。ここに、慎んで感謝の意を表します。

指導教官である東北大学理学研究科 准教授 内田就也先生には、研究のあらゆる面にわたり格別のご指導をいただき、心より深く感謝申し上げます。私のまとまりのない研究概念や文章から要点をいつもの確に汲み取ってくださり、適切なお助言を賜りましたこと、心より御礼申し上げます。先生のご助言がなければ、本研究をよりシンプルかつ具体性を備えた物理モデルに近づけることは不可能だったと存じます。また、長期にわたる投稿論文の査読に私が心を悩ませていた際に、先生が結果を前向きに楽しみにしてくださっているご様子に触れ、研究に臨む姿勢のあり方について深く考えさせられ、大きな励ましをいただきました。先生より賜ったお言葉や研究への向き合い方は、今後の研究生活においても大切な指針となります。

非線形セミナー・仲善セミナーのメンバーの皆さまには、日頃のゼミにおいて多くの建設的なご助言と議論の機会をいただき、研究内容の深化・発展にご示唆をいただきました。また、秘書室の皆さまには、大学院生活の各場面において、日々の研究活動を円滑に進めるための温かいご支援を賜りました。本当にありがとうございました。

さらに、本論文を審査くださいました川勝年洋教授、早川美徳教授、今井正幸教授、佐久間由香准教授には、ご審査・ご指導賜りましたことに深く感謝いたします。いただいた貴重なご意見は、本研究の学術的価値をより確かなものへと高める一助となりました。川勝先生には学部1年次の基礎ゼミから始まり、様々な場面で大変お世話になりました。改めて、感謝申し上げます。また、医工学研究科 石川拓司教授には、卒業後の研究の場をお与えいただき、安心して博士論文の執筆に打ち込むことができました。厚く御礼申し上げます。

本研究は、日本学術振興会(助成番号 23KJ0171)および東北大学 学際高等研究教育院の支援を受けて遂行されました。学会や交流会で議論してくださった多くの研究者の皆さまにも、この場を借りて心より御礼申し上げます。最後に、長い年月にわたり、多方面から私を支えてくれた家族、特に一番の理解者である母に深く感謝いたします。