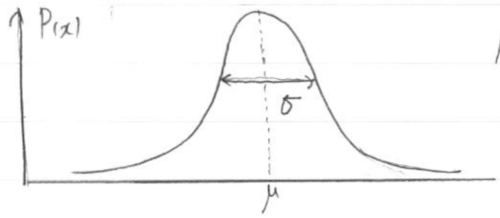
統計物理学I 小テスト(4/15) 解答例.

(1)



μは平均として、確率変数xが、どこを中心に分布しているのかを表し、σは平均を中心として、どの程度分布にばらつきがあるのかを表す。

(2) $$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

$x-\mu = y$ と変数変換して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

(i). Gauss積分の両辺をaで微分すると、 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (+x^2) \cdot e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ なので、 $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ として、

$$= \frac{2\sigma^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \sigma^2$$

(ii). 部分積分から

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ \left[y(-\sigma^2) \overset{\text{expについて、0に収束}\ \to 0}{\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sigma^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy}_{=\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$= \sigma^2$$