統計力学II. 小テスト（7/1）解答例.

(1). 一粒子の分配関数は

$$Z_1 = \sum_i e^{-\beta E_i} = e^{-\beta \mu H} + e^{+\beta \mu H}$$

粒子間は相互作用しないことから、全系の分配関数と、自由エネルギー、及びエントロピーは、

・ $$Z = (Z_1)^N = (e^{-\beta\mu H} + e^{\beta\mu H})^N = \left[2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right]^N$$

・ $$F = -k_B T \log Z = -N k_B T \cdot \log\left[2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right].$$

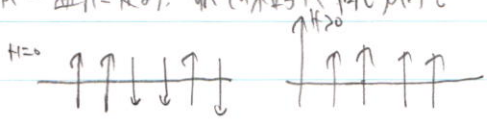
・ $$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = N k_B \cdot \log\left[2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right] + N k_B T \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)}{\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)} \cdot \frac{\mu H}{k_B} \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)$$

$$= N k_B \log\left[2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right] - N k_B \cdot \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) \cdot \frac{\mu H}{k_B T}$$

$$= N k_B \left\{ \log\left[2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right] - \frac{\mu H}{k_B T} \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) \right\}_{//}$$

(2) ・直観的解答

$T \to 0$ では、磁場がかかっていないと、各粒子それぞれに、↑ or ↓をとる場合が等しくあり、それがN コあるので、2^N 通りの状態があり よって、$S = k_B \log W = N \log 2$。一方、磁場があると、スピンの方向が一通りに定まり、すべての粒子が同じ方向を向くため、1通りしか状態がなく、$S = k_B \log 1 = 0$.



・計算

(i) $H=0$ のとき、前問より、$S = N k_B [\log[2\cosh(0)] - 0] = N k_B \log 2$.

(ii) $H>0$ のとき、

$$S = N k_B \left[\log\left[e^{\frac{\mu H}{k_B T}} \left(1 + e^{-2\cdot\frac{\mu H}{k_B T}}\right)\right] - \frac{\mu H}{k_B T} \cdot \frac{\cancel{e^{\frac{\mu H}{k_B T}}}\left(1 - e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right)}{\cancel{e^{\frac{\mu H}{k_B T}}} \cdot \left(1 + e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right)} \right]$$

$\log(e^{\frac{\mu H}{k_B T}}) + \underbrace{\log(1 + e^{-2\frac{\mu H}{k_B T}})}_{= x}$

$e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}$ を微小量とする

$$= N k_B \left[\frac{\mu H}{k_B T} + e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}} - \frac{\mu H}{k_B T} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right) \right].$$

$$= N k_B \left\{ \frac{\mu H}{k_B T} + e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}} - \frac{\mu H}{k_B T}\left(1 - 2e^{-\frac{\mu H}{k_B T}} + O\left(\left(e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right)^2\right)\right) \right]$$

$$= N k_B \, e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}} \left\{ 1 + 2\frac{\mu H}{k_B T} \right\} + O\left(\left(e^{-\frac{2\mu H}{k_B T}}\right)^2\right) \xrightarrow[(T \to 0)]{} 0 \quad \therefore S = 0.$$