

統計力学I 小テスト (2016/6/10)

問

Helmholtz の自由エネルギー $F = E - TS$ について考える。各微視的状态に対応する確率 $\{P_j\}$ および内部エネルギー $\{E_j\}$ を用いて、内部エネルギー E およびエントロピー S は以下のように与えられる。

$$E = \sum_k E_k P_k$$

$$S = -k_B \sum_k P_k \log P_k$$

このとき、確率の規格化条件 $\sum_k P_k = 1$ を考慮して Helmholtz の自由エネルギーを最小化する分布が Boltzmann 分布、すなわち

$$P_j = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right)$$

$$Z = \sum_k \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)$$

になることを証明せよ。