

# 多電子系の動力学と新しい素励起描像

東北大学大学院理学研究科 倉本義夫

## 概要

今までの物性物理学は、自由電子ガスモデルに代表されるように、電子間の相互作用効果を弱いものと考えて発展してきた。この考え方が多くの場合に正当であることは、半導体や金属のバンド理論の成功によって立証されてきた。しかし 1980 年代以降、分数量子ホール効果に代表されるように、電子間の相互作用が本質的に重要になる現象が複数の分野で見出され、相互作用効果を摂動論によらずに（しかもできるだけ直感的に）理解する必要性が認識されてきた。私見によれば、この必要性に応えるのが新しい素励起描像である。この講義では、電子が多数集まることによってはじめて生ずる性質を、具体的な現象をとりあげて説明し、それを理解するための理論的基礎について講義する。

## 1 はじめに

素粒子としての電子の性質は、定量的にも非常に高精度で分かっている。しかし電子が多数集まると、お互いの相互作用によって、一つの電子に見られない幾多の興味ある性質が出てくる。この講義では、電子が集団として示す性質を、代表的な例によって示しながら、これを理解するための概念と、基礎的な理論的手法を解説したい。

アボガド数程度の大きな自由度があると、一般に多粒子系の運動は非常に複雑になり、直感的な理解は望めない。しかし幸運なことに、多くの場合には、多数の自由度があってもこれらをすべてあからさまに扱う必要はない。即ち、基準となる状態を想定し、これから少数の粒子が励起されたとして、系の物理的性質が理解できることがある。このような考え方において中心的な役割を果たすのが、素励起の描像である。よく知られた素励起の例は、磁性体のマグノンや結晶のフォノンであり、これらは一種の自由粒子として考えられる。多くの場合、素励起描像は低温の状態、あるいは非常に弱く励起した状態だけに当てはまるが、これが広い励起エネルギーの領域にわたってよく成立する系もある。その場合、相互作用が強くても、系の直感的な理解が可能になる。自由な粒子であれば、たとえこれが少数ではなくても、全体としては一つの粒子の性質がそのまま出てくるからである。

強い相互作用がある系の基底状態は、一般にハミルトニアン $H$ の運動エネルギー部分の基底状態とはかなり異なる。相互作用の効果は摂動論を用いて理解することが一般的であるが、これを強力にした概念は、繰り込み（及び繰り込み群）という考え方である。今まで学部コースの量子力学によって学んできた摂動論を、もうすこし一般的な見方からとらえ直すと、繰り込みの考え方に至る。すなわち、通常の摂動論が固有エネルギーと固有関数を近似的に求めることを目的にしているのに対して、繰り込みに至る考え方では、有効ハミルトニアンという演算子を求めることを目的にする。特別な場合として、有効ハミルトニアンが作用する空間がひとつの基底しか持たない時には、演算子は固有値に帰着し、通常の摂動論が再現される。

新しい摂動論のもう一つの特徴は、摂動展開のパラメータとして自明でないものも用いることである。この有名な例は、かつて K.G. Wilson が用いた  $\epsilon$  展開である [1]。彼は系の次元  $d$  が 4 からずれていることを  $\epsilon = 4 - d$  として展開に用いた。この展開の動機は、4 次元以上で分子場理論が臨界現象を正しく記述することにあり、分子場からの展開に通ずる。自明でない展開パラメータのもう一つの例は、内部自由度の数  $n$  の逆数を用いることである。内部自由度の数  $n$  が十分大きいと、繰り込みの固定点が場合によっては簡単に求まるのだが、この展開のねらいである。

繰り込みの考え方が劇的に有効になるのは、近藤効果の問題である。近藤効果は、初めのハミルトニアンと、繰り込まれた後の有効ハミルトニアンが全く異なっている形をしている、という驚くべき特徴がある。近藤効果における繰り込みは、種々のやり方で行われてきたが、筆者の意見では、有効ハミルトニアンと、Rayleigh-Schrödinger 摂動論を用いるのが最も簡明である。本講義では、繰り込みの具体例として近藤効果を解説し、さらに重い電子系の解説へと進む。近藤効果では、最終的に実現される状態は、フェルミ流体とつながる状態であり、その解釈は直感的にできる。

一方、繰り込み効果が非摂動論的に働き、フェルミ流体状態が不安定になる場合もある。磁性不純物では、軌道縮退があると非フェルミ流体の基底状態が生じえる。また 1 次元の電子系では一般に非摂動効果が強いので、フェルミ液体状態は不安定になり存在しない。この時有効な考え方は、フェルミ粒子としての電子が、集合的に振る舞う結果、ボソンとしての波として振舞うと見るか、あるいはより一般的に分数統計に従う素励起を生み出すということである。

分数統計粒子は、数学的な産物だけではなく、実際の物理現象を支配している。典型的な例は 1 次元ハイゼンベルグモデルの動力学に現れる。即ち、中性子散乱で測定される動的構造因子は、スピノンと呼ばれる分数統計粒子を用いて非常に直感的に解釈することができる [2, 3]。これは新しい素励起描像が最も効果的に働いた典型例である。新しい素励起描像が、その有効性を劇的に示したもうひとつの典型例は、分数量子ホール効果である。この系では、非圧縮性の基底状態ができ、そこからの素励起は分数統計に従う。この粒子に付随する電荷も電子の分数になるが、これは実験で確認されている [4, 5]。

本講義では、このような目覚しい進展を理解するために必要な基礎的事項に重点をおいて解説する。実際の講義では、聴衆の反応を見ながらトピックを選択する自由度を残したい。

## 2 摂動論と繰り込み

### 2.1 有効ハミルトニアン

物理現象を考えるときに、すべてのエネルギー領域を問題にすることはまれである。注目しているエネルギー領域の情報得られれば十分な場合が多い。例えば低温の比熱では、注目する温度と同程度のエネルギー領域にある励起スペクトルだけが問題になる。このような場合、すべての状態を含んだハミルトニアンから、低エネルギーの状態だけを正しく記述することを目標に単純化をする。この目標に答える有効ハミルトニアンは、その詳細について漠然と語られることが多いが、厳密な構成を行うことも可能である。以下では、この構成の概要を説明する [6]。

全系の波動関数を  $\psi$  として、シュレーディンガー方程式  $H\psi = E\psi$  を考える。注目するエネルギー領域に状態を狭く限ったものをモデル空間とよぶ。有効ハミルトニアンに対する基本的な要請は、注目する領域では元のシュレーディンガー方程式と、同じ固有値を与えることである。すなわち、

$$H_{eff}P\psi = EP\psi. \quad (1)$$

ここでモデル空間への射影演算子  $P$  を導入した。有効ハミルトニアンは、以下のようにして (形式的には) 厳密に決めることができる。まず、モデル空間に直交する空間への射影演算子  $Q$  を導入する。すなわち  $P + Q = 1$ 。するとシュレーディンガー方程式は次のように書き直せる。

$$(E - H_0)Q\psi = QV\psi \quad (2)$$

ここで、非摂動項  $H_0$  は、モデル空間内で対角化可能なものを選ぶ。すなわち、 $[H_0, P] = 0$  を要請する。次に波動演算子  $\Omega$  を導入する。これは、図 2.1 に模式的に示すように、モデル空間での波動関数をもとの波動関数に戻す演算子である。図で明らかなように、同一の投影  $P\psi$  を与える  $\psi$  は、 $Q\psi$  が異なる分だけ

無数に存在する。これにも関わらず、 $\Omega$  で元に戻せるのは、 $\psi$  が  $H$  の固有関数である、という条件を用いるからである。

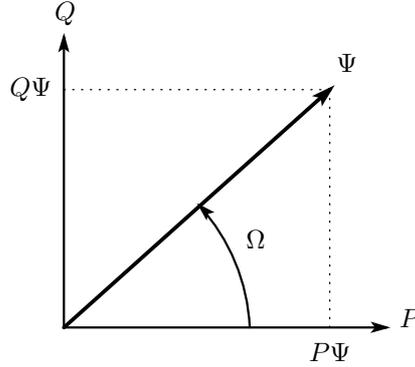


図 1: 波動関数  $\psi$  とその射影。

波動演算子  $\Omega$  の定義から、 $\psi = P\psi + Q\psi = \Omega(E)P\psi$  の関係が成り立つ。 $Q\psi$  を消去すると、 $\Omega$  が閉じた形で求まる。

$$\Omega(E) = \sum_0^{\infty} [R(E)V]^n, \quad R(E) = Q(E - H_0)^{-1}V \quad (3)$$

この結果から有効ハミルトニアンは、

$$H_{eff}(E) = PH\Omega(E) \quad (4)$$

のように求められる。

いままでの議論は、いささか抽象的なので、簡単な具体例を示すことにしよう。以下のように、厳密に解けるモデルを考える。

$$H = \epsilon_0 c_0^\dagger c_0 + \epsilon_1 c_1^\dagger c_1 + V(c_0^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_0) \quad (5)$$

ここで、モデル空間として、フェルミ粒子が下のレベル 0 にある状態を選ぶ。すると有効ハミルトニアン (実際にはエネルギー固有値) は以下の方程式で与えられる。

$$\langle 0|H|0\rangle = \epsilon_0 + \frac{V^2}{E - \epsilon_1} = E \quad (6)$$

この固有値  $E$  は二次方程式の解として

$$E = \frac{1}{2}(\epsilon_0 + \epsilon_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_1 - \epsilon_0)^2 + V^2} \quad (7)$$

と求まる。この解は厳密であり、もちろん通常対角化で求めた結果と一致する。

## 2.2 Rayleigh-Schrödinger 流の摂動論

以上述べた枠組みを、Brillouin-Wigner の摂動論と呼ぶ。この枠組みでの有効ハミルトニアンは、求めるべきエネルギーに依存している。このエネルギー依存性は、摂動論を高次まで行うときには、不便になる。このような不便を解消するのが、Rayleigh-Schrödinger の摂動論である。まずシュレーディンガー方程式を次のように書き直す。

$$(E - H_0)\psi = E\psi - H_0\Omega P\psi = V\Omega P\psi, \quad (8)$$

ここで射影演算子  $\Omega$  は、 $H_0 + V$  の固有状態に対して、 $\Omega P\psi = \psi$  を満たすことを用いた。また状態を指定する添え字  $i$  は省いた。式 (8) の両辺に演算子  $P$  をかけ、さらに  $\Omega$  をかけると、次の形を得る。

$$\Omega(E - H_0)P\psi = E\psi - \Omega H_0 P\psi = \Omega P V \Omega P\psi, \quad (9)$$

ここで、 $PH_0 = H_0P$  の性質を用いた。式 (9) を式 (8) から引くと、

$$[\Omega, H_0]P\psi = (1 - \Omega P)V\Omega P\psi \quad (10)$$

を得る。

射影演算子を、 $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$  のように級数展開する。ここで、 $\Omega_n$  は  $O(V^n)$  の寄与を表し、 $\Omega_0 = 1$  である。式 (10) の両辺で同じ次数の項を比較して、

$$[\Omega_n, H_0] = QV\Omega_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \Omega_j P V \Omega_{n-j-1} \quad (11)$$

を得る。この結果を用いると、一般項  $\Omega_n$  を低次の側から逐次求めることができる。また有効ハミルトニアン  $H_{eff} = P(H_0 + V)P + H_2 + H_3 + \dots$  において、 $H_n = P V \Omega_{n-1} P$  の関係を用いると、 $\Omega_n$  の知識から  $H_n$  を求めることができる。低次の項をあからさまに示すと、次のようになる。

$$\langle a|H_2|b\rangle = \langle a|V(\epsilon_b - H_0)^{-1}QV|b\rangle, \quad (12)$$

$$\langle a|H_3|b\rangle = \langle a|V\frac{1}{\epsilon_b - H_0}QV\frac{1}{\epsilon_b - H_0}QV|b\rangle - \sum_c \langle a|V\frac{1}{\epsilon_b - H_0}\frac{1}{\epsilon_c - H_0}QV|c\rangle\langle c|V|b\rangle. \quad (13)$$

ここで、 $|a\rangle, |b\rangle$  で示されるすべての状態は、モデル空間に属する。eq.(13) で、右辺第一項は Brillouin-Wigner 摂動論の結果と同じであるが、第二項は新しく現れたものである。この新しい項は、高次のクラスター展開をする際には重要な役割を果たす。これについては残念ながら詳しく述べる紙数がないが、参考文献を参照されたい [6]。

### 2.3 Anderson モデルと近藤モデル

磁性不純物を記述するための、最も基本的なモデルとして Anderson モデルがある [7]。もっとも単純なバージョンでは、局在電子として軌道縮退がないものを取り、それと混合する伝導電子としては、s 波のものを考える。局在電子の間には、クーロン相互作用  $U$  が働くものとする。Anderson モデルは次のように与えられる。

$$H_A = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [\epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{N}} V_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger f_\sigma + f_\sigma^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma})] + \sum_{\sigma} \epsilon_f f_\sigma^\dagger f_\sigma + \frac{1}{2} U \sum_{\sigma \neq \sigma'} n_{f\sigma} n_{f\sigma'} \quad (14)$$

ここで、 $V_{\mathbf{k}}$  は、混成の大きさであり、 $N$  は、格子点の数である。Anderson モデルは、近藤効果を含んでおり、これを正確に解くことは、非常に困難である。

さて、f 電子のレベル  $\epsilon_f$  が、フェルミレベルよりも非常に深いところにあり、大きなクーロン相互作用のために、番目の電子がとるレベル  $\epsilon_f + U$  は、フェルミレベルよりも上にある状況を考えよう。このような場合には、f 電子の占有数はほとんど 1 であり、これの揺らぎは無視できる。するとモデル空間としては、局在電子が空の状態と、これが 2 個ある状態を排除してよいので、局在電子の自由度として残るのはスピンだけになる。この事情をあからさまに考慮した有効ハミルトニアンを導いてみよう。混成相互作用  $H_{hyb}$  は、モデル空間とそれに直交する空間を結ぶ。従って、最低次の有効相互作用は以下ようになる。

$$H_{int} = P H_{hyb} (E_g - H_c - H_f)^{-1} Q H_{hyb} P. \quad (15)$$

ここで  $E_g$  は、ゼロ次の基底状態エネルギーである。 $H_c, H_f$  はそれぞれ伝導電子の運動エネルギー部分と、混成のない f 電子のハミルトニアンである。また  $P$  に直交する中間状態は、空か二重占有のどちらかである。

伝導電子が、f 電子と混成して、二重占有の状態に移れるのは、両者の全スピンの 0 のときだけである。二重占有状態から、伝導電子と f 電子に別れるときには、各々のスピンの混成前と反転する場合と、そのまま変わらない場合とがある。前者は、交換相互作用と呼ばれる。これを計算すると、有効モデルは次のように与えられる。

$$H_{eff} = H_c + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \sum_{\mathbf{k}'\beta} \left[ \frac{1}{2} J_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha} c_{\mathbf{k}'\beta}^\dagger c_{\mathbf{k}\alpha} + K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}'\beta}^\dagger c_{\mathbf{k}\alpha} \right], \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  は不純物スピンの演算子であり、交換相互作用は

$$J_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 2V_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}'} \left[ \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_f} - \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_f - U} \right], \quad (17)$$

である。一方スピンの変わらない過程に利く相互作用は以下のように与えられる。

$$K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}'} \left[ \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_f} + \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_f - U} \right]. \quad (18)$$

このモデル  $H_{eff}$  は、さらに簡単化することができる。即ち、 $V_{\mathbf{k}}$  を波数によらない定数  $V$  で置き換え、散乱に關する伝導電子のエネルギー  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  などを  $\epsilon_f$  や  $\epsilon_f + U$  に比べて無視することである。特別な場合として、 $\epsilon_f + U = |\epsilon_f|$  が成り立っていると(「対称の場合」と呼ばれる)、 $K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  は消える。この場合交換相互作用は、 $J = 2V^2/|\epsilon_f|$  と与えられる。このモデルを、近藤モデル(あるいは s-d モデル)と呼ぶ [8]。

以上をまとめると、不純物サイトにおける伝導電子のスピン演算子を  $s_c$  として、近藤モデルは

$$H_K = H_c + J\mathbf{S} \cdot s_c = H_c + H_{ex}, \quad (19)$$

と与えられる。運動量表示では、

$$s_c = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\mu\nu} c_{\mathbf{k}\mu}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\mu\nu} c_{\mathbf{k}'\nu} \quad (20)$$

である。

近藤モデルは Anderson モデルよりもさらに簡単な形をしているが、 $J$  がどんなに小さくても、これについての摂動論が破たんするという驚くべき性質がある [8, 9]。一方温度が交換相互作用よりも高いと、 $J$  についての摂動論を行うのが最も簡便であり便利である。ここで注意すべきことは、Anderson モデルの自然な展開パラメータ  $U$  と、近藤モデルの展開パラメータ  $J$  は、互いに異なる無摂動状態を持っているということである。繰り込みによって、初めて両者の基底状態が連続的につながるようになる。これらの詳しい解析は次の章で行うが、関連するモデルとして、Coqblin-Schrieffer model  $H_{CS}$  と呼ばれるモデルを説明しておく [10]。このモデルは次のハミルトニアンで定義される。

$$H_{CS} = H_c + \frac{J}{2} \mathcal{P}_{spin}. \quad (21)$$

ここで  $\mathcal{P}_{spin}$  は、伝導電子と局在電子の内部自由度  $\nu, \mu$  を取り換える演算子である。内部自由度が  $SU(2)$  の場合には

$$\mathcal{P}_{spin} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\nu\mu} f_\nu^\dagger f_\mu c_{\mathbf{k}\mu}^\dagger c_{\mathbf{k}'\nu} = 2\mathbf{S} \cdot s_c + \frac{1}{2} \hat{n}_f \hat{n}_c \quad (22)$$

と表すことができる。ここで、 $\hat{n}_f$  ( $= 1$ ) は f 電子の、個数演算子であり、 $\hat{n}_c$  は、不純物サイトの、伝導電子の個数演算子である。

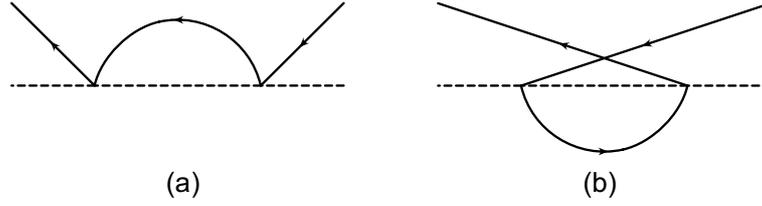


図 2: 2 次の交換散乱過程。実線は伝導電子，波線は不純物スピンを表す。

### 3 近藤効果

#### 3.1 近藤効果の繰り込み

近藤モデルに対して有効ハミルトニアンの方法を適用しよう [6]。この原型は Anderson による”poor man’s scaling”である [11]。まず，伝導バンドは一様なスピンあたり状態密度  $\rho_c = (2D)^{-1}$  を  $-D$  から  $D$  まで持っているとして仮定する。またフェルミ準位はバンドの中心にあるものとする。つまり  $\mu = 0$ 。モデル空間として，バンドのはじめの状態が指定した分だけ排除されたものを考えよう。非常に強力な方法は，この排除の一つの過程を無限小にして微分方程式を適用することである。これを具体的に実行しよう。Rayleigh-Schrödinger の摂動論の最低次では，有効ハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H_{eff} = P(H_c + H_{ex})P + PH_{ex}(E_i - H_c)^{-1}QH_{ex}P \quad (23)$$

ここで， $E_g$  は， $H_c$  の基底状態エネルギーである。射影演算子  $Q$  として，伝導電子のエネルギーを  $[D + \delta D, D]$  および  $[-D, -D - \delta D]$  ( $\delta D < 0$  は無限小) に投影するものを選ぶ。

入射する伝導電子のスピンとして  $\sigma$ ，中間状態として  $\xi$ ，また散乱状態として  $\sigma'$  を与える。右の部分の散乱においてスピンの成分  $JS^\alpha s_c^\alpha$  を考える。または左の部分では，成分  $JS^\beta s_c^\beta$  を考えよう。図 2 (a) において， $s_c$  の行列要素は

$$\langle \sigma' | s_c^\beta | \xi \rangle \langle \xi | s_c^\alpha | \sigma \rangle, \quad (24)$$

と与えられる。この過程は直接散乱と呼ばれ，図 2 (a) に示されている。同様に図 2 (b) は，交換散乱と呼ばれ，行列要素は，

$$\langle \sigma' | s_c^\alpha | \xi \rangle \langle \xi | s_c^\beta | \sigma \rangle \quad (25)$$

となる。中間状態のエネルギーは， $\xi$  によらないので，これについての和をとることができる。ここで過程 (b) はフェルミ演算子の交換を伴うので，- の符号がつく。そこで，(a) と (b) の和をとると，

$$\frac{J^2}{-D} \sum_{\alpha\beta} S^\beta S^\alpha [s_c^\beta, s_c^\alpha] \delta D | \rho_c, \quad (26)$$

が 2 次の有効ハミルトニアンとして求められる。 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  を完全反対称テンソルとして，次の交換関係

$$[s_c^\beta, s_c^\alpha] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_c^\gamma, \quad (27)$$

が成り立つことに注意すると，有効相互作用ハミルトニアンは，もとの交換相互作用  $H_{ex}$  と同じ形をしていて，相互作用の強さだけが異なっているとわかる。そこで，相互作用の変化分  $\delta J$  として，

$$\delta J = -\frac{\delta D}{D} J^2 \rho_c \quad (28)$$

という関係式が得られる。これはスケーリング方程式，あるいは繰り込み群方程式と呼ばれる。

このように有効バンド幅を狭くする操作を繰り返す。有効バンド幅  $2D_{eff}$  が興味を持っているエネルギー尺度よりも十分大きければ，繰り込みの各ステップで，最低次の摂動論を正当化することができる。このような条件のもとで，スケーリング方程式を積分して，

$$J_{eff} = \frac{J}{1 - J\rho_c \ln(D/D_{eff})} \quad (29)$$

を得る。ここで境界条件として， $D_{eff} = D$  で  $J_{eff} = J$  となることを用いた。

$J_{eff}$  の最も重要な性質は， $D_{eff}$  の減少とともに次第に増大し， $D_{eff} = D \exp[-1/(J\rho_c)]$  になると発散することである。この特性エネルギー  $D \exp[-1/(J\rho_c)]$  を温度スケールで表したものを，近藤温度  $T_K$  と呼ぶ。後で見ると， $T_K$  は，帯磁率や比熱などの物理量を決定する。 $T_K$  は交換相互作用で展開できない形をしていることに注意する。上の議論から明らかなように，繰り込みが  $D_{eff} = T_K$  に至るまで有効という保証はない。従って， $J_{eff}$  の発散は字義通りに解釈すべきではない。むしろ，エネルギー尺度を小さくすると  $T_K$  程度で摂動論が破たんするということを言っている。

系の温度  $T$  が  $T_K$  よりも十分大きい場合には，熱的に励起された伝導電子を考える必要がある。この効果を考慮すると，繰り込みにおいて  $D_{eff}$  が温度  $T$  と同程度になった時点で，有効バンド幅はそれ以上小さくできないことがわかる。従って温度  $T$  での有効相互作用は次のように与えられる。

$$J_{eff}(T) = \frac{J}{1 - J\rho_c \ln(D/T)} \quad (30)$$

電気抵抗や帯磁率などの物理量の摂動計算において，もともとの  $J$  をここで求めた  $J_{eff}(T)$  で置き換えると，高次の摂動効果を取り入れた結果が得られる。

この事情を抵抗率  $\rho$  の場合をとって説明しよう。金属に対する最も簡単な伝導理論によると，電気伝導度  $\sigma = 1/\rho$  は，緩和時間  $\tau$  を用いて次のように書ける。

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} \quad (31)$$

ここで， $n$  は有効質量  $m^*$  を持つ伝導電子の密度である。ボルン近似によると，

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi c_{imp} J^2 \sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 \text{Tr} c_{\alpha}^2 = \frac{3\pi}{4} c_{imp} \frac{J^2}{\rho_c} \quad (32)$$

が得られる。ここで  $c_{imp}$  は，磁性不純物の密度である。ボルン近似では，高いエネルギーを持つ中間状態の存在は考慮していないが，これらの状態は，繰り込みによって低エネルギー状態に影響を与える。 $J_{eff}(T)$  を  $J$  の代わりに用いることにより，高いエネルギーを持つ中間状態の効果が取り入れられる。このような置き換えにより

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{[1 - J\rho_c \ln(D/T)]^2} = \frac{\rho_0}{[J\rho_c \ln(T/T_K)]^2} \quad (33)$$

という結果を得る。ここでボルン近似での抵抗率を  $\rho_0$  とした。この結果は，摂動級数を無限次まで和をとった結果と一致する [12]。また通常の摂動論において， $O(J^3)$  までとった近藤のオリジナルな結果 [8] を再現する。

### 3.1.1 局所的フェルミ流体論

近藤モデルの固定点は，局所的フェルミ流体理論で簡明に記述される。局所的フェルミ流体とは，系の低励起状態が， $U = 0$  の Anderson モデルと一対一に対応することを意味する。はじめの扱いは，Noziers によるもので，多体効果が位相のずれをもたらすことを用いている [13]。ここでは，ランダウの扱いに沿っ

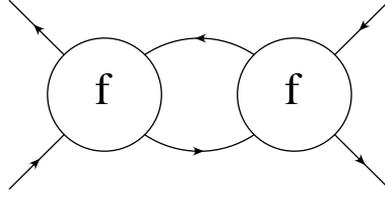


図 3: 有効相互作用  $f(p\sigma, k\sigma')$  による準粒子の 2 次の散乱過程。

た筆者の別法を紹介する [6]。まずクーロン相互作用のない Anderson モデルを対角化する。s 波の伝導電子だけが混成に関与すると、それぞれの固有状態は、球面波の動径方向運動量  $p$  とスピンの指定される。準粒子の分布関数は、基底状態では相互作用がないものと同じである。基底状態からのずれ  $\delta n_{p\sigma}$  が励起状態のエネルギーを決める。これを具体的に見るために次のような展開をする。

$$E = E_g + \sum_{p\sigma} \epsilon_{p\sigma} \delta n_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sum_{k\sigma'} f(p\sigma, k\sigma') \delta n_{p\sigma} \delta n_{k\sigma'} + O(\delta n_{p\sigma}^3). \quad (34)$$

ここで  $f(p\sigma, k\sigma')$  は、一様なフェルミ流体に対する準粒子間相互作用に対応する [14]。通常の場合、展開の 2 次までの項をとれば十分である。

$\delta n_{p\sigma}$  は、フェルミ順位の近傍に鋭いピークを持っている。従って  $f(p\sigma, k\sigma')$  が運動量の関数としてなめらかであれば、 $p$  と  $k$  をフェルミ運動量  $p_F$  で置き換えることができる。回転対称性を考慮すると、無次元のランダウ・パラメータとして、

$$F = \frac{1}{2} [f(p_F\sigma, p_F\sigma) + f(p_F\sigma, p_F\bar{\sigma})] \rho^*, \quad Z = \frac{1}{2} [f(p_F\sigma, p_F\sigma) - f(p_F\sigma, p_F\bar{\sigma})] \rho^*, \quad (35)$$

だけに関与する。ここで、 $\bar{\sigma} = -\sigma$  であり、 $\rho^*$  はフェルミ順位での準粒子のスピンあたり状態密度である。伝導電子の状態数は  $N$  のオーダーであり、 $F$  と  $Z$  は  $1/N$  のオーダーであることに注意する。

$f(p\sigma, k\sigma')$  は、動径方向だけの自由度を持つ仮想的次元系の有効相互作用と見なされる。この系の運動量は、元々動径方向成分なので正である。準粒子の散乱振幅において、移行運動量  $q$  と移行エネルギー  $\omega$  が小さいものに対しては、図 3 に示すような繰り返し散乱を考える必要がある。図 3 において、基本要素は、準粒子のゼロ次感受率であり、

$$\chi_0(q, \omega) = \frac{2}{N} \sum_k \frac{kq/m^*}{\omega - kq/m^* + i\delta} \left( -\frac{\partial f(\epsilon_k)}{\partial \epsilon_k} \right), \quad (36)$$

のように与えられる。ここで、 $m^*$  は準粒子の有効質量である。感受率は、比  $v_F q / \omega$  の関数である。ここで、 $v_F$  はフェルミ速度である。 $q$  極限と呼ばれる  $v_F q \gg \omega$  の場合には、 $\chi_0(q, \omega)$  は  $\rho^*$  に漸近する。また  $\omega$  極限と呼ばれる  $v_F q \ll \omega$  の場合には、 $\chi_0(q, \omega)$  はゼロに近づくことに注意する。

フェルミ流体パラメータ  $F$  および  $Z$  は、 $\omega$  極限での準粒子の前方散乱振幅に対応する。一方、 $q$  極限での前方散乱振幅  $a(p\sigma, k\sigma')$  は、以下のように与えられる。

$$a(p\sigma, k\sigma') = f(p\sigma, k\sigma') - \rho^* \sum_{\tau} f(p\sigma, p\tau) a(p\tau, k\sigma'), \quad (37)$$

これは、図 3 において、繰り返し散乱の寄与を考慮することによって得られる。eq.(35) と同様にして、 $a(p\sigma, k\sigma')$  を組み合わせ、パラメータ  $A$  (スピン対称部分) 及び  $B$  (スピン反対称部分) を導入する。eq.(37) を解いて、以下の結果を得る。

$$A = F/(1 + F), \quad B = Z/(1 + Z). \quad (38)$$

さてフェルミオン波動関数の反対称性から，入射する準粒子の運動量とスピンの， $p_3\sigma_3, p_4\sigma_4$ ，散乱する準粒子が  $p_1\sigma_1, p_2\sigma_2$  を持つ場合，散乱振幅には

$$\langle p_1\sigma_1, p_2\sigma_2 | a | p_3\sigma_3, p_4\sigma_4 \rangle = -\langle p_1\sigma_1, p_2\sigma_2 | a | p_4\sigma_4, p_3\sigma_3 \rangle \quad (39)$$

という制限が生ずる。特に前方散乱の場合には， $a(p\sigma, p\sigma) = 0$  となるが，これは

$$A + B = 0 \quad (40)$$

と同等である。この結果に対応する関係は，通常のフェルミ流体にもあり，前方散乱総和則と呼ばれる。結局，Anderson モデルの準粒子間相互作用を特徴づける独立なパラメータは，一つしかないことがわかる [15]。

熱的励起の場合には， $\delta n_p$  は  $p - p_F$  の奇関数である。そこでエネルギーの増加には， $\delta n_p$  の一次の項が支配的に効く。これは通常のフェルミ流体と同様で，エネルギーには  $O(T^2)$  の補正項を与える。一方準粒子間の相互作用は， $O(T^4)$  程度の補正を与える。比熱は状態密度の補正項で決まるので，これを実際に求めてみよう。不純物による状態密度の補正項は，パラメータ  $\alpha = O(1/N)$  によって次のように特徴づけられる。

$$\rho^* = \rho_c(1 + \alpha) \quad (41)$$

すると不純物による比熱の寄与  $C$  は

$$C = \frac{1}{3}\pi^2\rho_c\alpha T \equiv \gamma T, \quad (42)$$

を求められる。 $\rho_c$  が  $O(N)$  であること考慮すると， $C$  の大きさは  $O(1)$  であることがわかる。

一方スピン帯磁率は，系全体では，

$$\chi_s^{total} = \frac{\rho^*}{4(1+Z)} = \frac{1}{4}\rho_c(1 + \alpha - Z) + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (43)$$

となる。そこで不純物の寄与  $\chi_s$  は

$$\chi_s = \frac{1}{4}\rho_c(\alpha - Z) \quad (44)$$

と求められる。同様に，電荷感受率  $\chi_c$  を計算することができる。結果として， $\chi_c = \rho_c(\alpha - F)$  を得る。

上の議論から，比熱と帯磁率の間の重要な関係式を導くことができる。すなわち  $A + B = F + Z + O(1/N^2) = 0$  に注意すると，関係式

$$4\chi_s + \chi_c = 6\gamma/\pi^2, \quad (45)$$

を得る。これを，相互作用がない場合の量で規格化すると，

$$\chi_s/\chi_{s0} + \chi_c/\chi_{c0} = 2\gamma/\gamma_0 \quad (46)$$

の関係を得る。仮に  $f$  順位が非常に深いところにあり， $U$  が非常に大きければ，電荷感受率  $\chi_c$  はほとんどゼロである。この極限では帯磁率の増大  $\chi_s/\chi_{s0}$  と比熱の増大の比  $R$  は 2 に漸近する。Anderson モデルでは， $R$  は 1 と 2 の間の値をとる。 $R$  は不純物系の相互作用の増大を示す目安になるので，ウィルソン比と呼ばれて広く用いられている [16]。

### 3.1.2 $1/n$ 展開

Anderson モデルの固定点はスピン単重項であり， $f$  電子が空の状態と連続的につながっている。軌道縮退  $n$  が大きい極限から考えると，この事情を直感的に理解できる。すなわち Anderson モデルにおいては  $1/n$  を展開パラメータとする摂動論が収束すると期待される。小さいパラメータ  $1/n$  は混成相互作用の  $s$

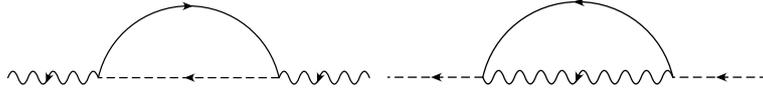


図 4: 最低次の有効ポテンシャル。波線は  $f$  電子が空の状態, 波線は占有状態を示す。

ケーリングとして現れる。ここで, 混成相互作用に関する摂動論が, 高温では局在電子からの自然な展開になる事情を考慮すると,  $1/n$  展開はすべての温度領域で有効になることが予想される。

Anderson モデル  $H_A$  において, スピンの添え字  $\sigma$  が  $n$  通りの値をとり,  $U$  が無限大である場合を考える。このモデルは  $SU(n)$  Anderson モデルと呼ばれている。すなわち

$$H_{SU(n)} = H_c + H_f + H_{hyb} \quad (47)$$

で混成の強度  $W_0(\epsilon)$  を

$$W_0(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |V_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}}), \quad (48)$$

によって導入する。ここで混成強度は  $-D < \epsilon < D$  では定数  $W_0$  をとり, これから外れると 0 になると仮定する。今  $nW_0$  をエネルギーの単位に取り, Brillouin-Wigner の摂動論を用いる。モデル空間を単重項にとると有効相互作用は  $O(1)$  になる。その理由は  $f$  電子の中間状態として  $n$  通りの状態が可能だからである。それに対して, 別のモデル空間として多重項状態 (局在電子の状態) をとると,  $f$  電子の中間状態としては空の状態一つだけが可能である。この様子は図 4 に示されている。

単重項の基底状態エネルギー  $E_0$  は, 伝導電子だけの基底状態から測って

$$E_0 = \langle 0 | H_{hyb} (E_0 - H_c - H_f)^{-1} H_{hyb} | 0 \rangle = nW_0 \int_{-D}^0 \frac{d\epsilon}{E_0 + \epsilon - \epsilon_f} \quad (49)$$

のように与えられる。極端な場合として  $nW_0 \ll |\epsilon_f| \ll D$ , をとると,  $E_0$  は解析的に求まる。即ち

$$E_0 - \epsilon_f \equiv -T_0 = -D \exp\left(\frac{\epsilon_f}{nW_0}\right) \quad (50)$$

である [17]。一方, 多重項状態 (局在状態) から出発すると, 中間状態がひとつしかないのでエネルギーの補正は  $O(1/n)$  の程度である。従って多重項状態のエネルギー  $\epsilon_f$  は, 単重項状態のエネルギー  $E_0$  よりも  $T_0$  の程度だけ高い。このように簡単な計算で, 近藤温度に対応するエネルギー尺度  $T_0$  を導出できたことは興味深い。

$f$  電子の平均占有数  $n_f$  が 1 から外れる場合は, 占有数がゆらいているので価数揺動と呼ばれる。  $n_f$  は次のように計算される。

$$n_f = \frac{\partial E_0}{\partial \epsilon_f} = nW_0 \int_{-D}^0 d\epsilon \frac{1 - n_f}{(E_0 + \epsilon - \epsilon_f)^2} \sim \frac{nW_0}{T_0} (1 - n_f). \quad (51)$$

すなわち,

$$n_f = \left(1 + \frac{T_0}{nW_0}\right)^{-1} \quad (52)$$

である。帯磁率は, 磁場中の基底状態エネルギー  $E_0(H)$  を磁場  $H$  に関して 2 回微分する事によって得られる。  $E_0(H)$  は以下のように与えられる。

$$E_0 = W_0 \sum_{J_z} \int_{-D}^0 \frac{d\epsilon}{E_0 + \epsilon - \epsilon_f - g_J \mu_B J_z H}. \quad (53)$$

これを直接計算すると,

$$\chi = C_J n_f / T_0, \quad (54)$$

となる。ここで  $C_J = (g_J \mu_B)^2 J(J+1)/3$  は全角運動量が  $J = (n-1)/2$  の場合のキュリー一定数である。そこで帯磁率もやはり  $T_0$  で決まっていることがわかる。

## 3.2 近藤系の動力学

### 3.2.1 分子場理論

基底状態を記述する固定点のハミルトニアンがわかると、ある種の分子場理論を行うことができる [18]。  $n$  重縮退した Anderson モデルで、 $f$  電子が空の状態  $|0\rangle$  を作り出すボソン演算子  $b^\dagger$  と、スピン  $\sigma$  の状態を作り出す演算子  $f_\sigma^\dagger$  を次のように導入する。

$$|0\rangle\langle 0| = b^\dagger b, \quad |\sigma\rangle\langle \sigma| = f_\sigma^\dagger f_\sigma, \quad |\sigma\rangle\langle 0| = f_\sigma^\dagger b. \quad (55)$$

すなわち  $b^\dagger$  は仮想的な「真空」に作用して、物理的な (不純物状態としての)  $f$  電子の空状態を作り出す演算子である。物理的な  $f$  電子の状態は、必ずこれらの状態のどれか一つに対応するので、拘束条件  $\sum_\sigma f_\sigma^\dagger f_\sigma + b^\dagger b = 1$  を課す。拘束条件を演算子間の関係式と見なすと  $f_\sigma$  と  $f_\sigma^\dagger$  はフェルミオンの交換関係を満たさない。しかし、拘束条件をフォック空間にある状態の選択則と見なして、演算子自体は通常のフェルミオンとボソンの交換関係を満たすとする考え方もできる。後者の考え方では、仮想的なフェルミオンとボソンはスレーブ粒子と呼ばれることがある。

スレーブ粒子を用いた平均場理論では、拘束条件は統計平均としてだけ満足させる。すなわち

$$\sum_\sigma \langle f_\sigma^\dagger f_\sigma \rangle + \langle b^\dagger b \rangle = 1 \quad (56)$$

である。さらに、

$$\langle b^\dagger b \rangle = |\langle b \rangle|^2 \quad (57)$$

と近似する。ここで現れた平均値  $\langle b \rangle = r$  は、 $b$  の位相揺らぎを取り入れた厳密な議論ではゼロになるべきものである。しかし、この揺らぎをひとまず無視して、 $r$  を変分を用いて最適化すると、 $SU(n)$  Anderson モデルはクーロン相互作用のない別の Anderson モデル  $H_{MF}$  に写像される。すなわち、

$$H_{MF} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} [\epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{N}} V_{\mathbf{k}} r (c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger f_\sigma + f_\sigma^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma})] + \epsilon_f \sum_\sigma f_\sigma^\dagger f_\sigma + \lambda(n_f + r^2 - 1), \quad (58)$$

ここで  $\lambda$  はラグランジュの未定係数である。また  $V_{\mathbf{k}}$  と  $r$  は実数にとる。

変分原理は以下のように用いる。任意の演算子  $O$  の平均  $\langle O \rangle$  を、最適化する統計演算子  $\exp(-\beta H_{MF})$  を用いてとると、ファインマンの不等式

$$\Omega \leq \Omega_{MF} + \langle H_{SU(n)} - H_{MF} \rangle \quad (59)$$

が成立する。右辺の第 2 項は  $-\lambda(n_f + r^2 - 1)$  となる。 $\lambda$  に関する変分をとると、次の結果を得る。

$$\lambda r = \sum_{\mathbf{k}\sigma} V_{\mathbf{k}} \langle f_\sigma^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle. \quad (60)$$

特性温度  $T_B$  ( $\sim T_K$ ) 以上では、 $r = 0$  が最適解になるが、この温度以下では  $r \neq 0$  の解が存在し、この方がエネルギーが低い。ちなみに  $T = T_B$  における相転移は、平均場理論の不正確さによるもので、実際に

は高温からなめらかに低温状態に移行する。絶対零度においては，平均場理論は Anderson モデルの固定点を正しく与える。そこで以下の議論は  $T = 0$  に限定する。

統計平均を計算するには，グリーン関数を用いるのが便利である。f 電子に対するグリーン関数  $G_f^*(z)$  は， $H_{MF}$  を用いて次のようになる。

$$G_f^*(z) = [z - \tilde{\epsilon}_f + i\tilde{\Delta}\text{sgn}(\text{Im}z)]^{-1}, \quad (61)$$

ここで  $\tilde{\epsilon}_f = \epsilon_f + \lambda$  および  $\tilde{\Delta} = \pi r^2 W_0$  である。この理論の励起は準粒子によると考えられるので関連する物理量にアスタリスク (\*) をつける。たとえば状態密度  $\rho_f^*(\epsilon)$  は

$$\rho_f^*(\epsilon) = \frac{\tilde{\Delta}}{\pi} \frac{1}{(\epsilon - \tilde{\epsilon}_f)^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (62)$$

と与えられる。f 電子の占有数  $n_f$  は  $\rho_f^*(\epsilon)$  をフェルミ準位まで積分して

$$n_f = \frac{n}{\pi} \arctan\left(\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\epsilon}_f}\right) \quad (63)$$

と求められる。

一方，混成グリーン関数  $G_{cf}(k, z) = \langle \{c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, f_\sigma\} \rangle(z)$  は

$$G_{cf}(k, z) = G_{fc}(k, z) = V_{\mathbf{k}} r (z - \epsilon_{\mathbf{k}})^{-1} G_f^*(z) \quad (64)$$

となる。 $G_{cf}$  を用いて少し計算すると，次の結果が求められる。

$$\sum_{\mathbf{k}\sigma} V_{\mathbf{k}} \langle f_\sigma^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = n W_0 r \ln \left( \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}_f^2 + \tilde{\Delta}^2}}{D} \right), \quad (65)$$

ここで  $\rho_c$  と  $V_{\mathbf{k}}$  は  $D > \epsilon > -D$  では定数，これからはずれるとゼロとした。つまり eq.(60) は

$$\sqrt{\tilde{\epsilon}_f^2 + \tilde{\Delta}^2} = D \exp\left(\frac{\lambda}{n W_0}\right), \quad (66)$$

と同等である。ここで指数の中の  $\lambda$  は  $|\tilde{\epsilon}_f| \ll |\epsilon_f|$  を考慮すると  $-\epsilon_f$  で置き換えてよい。左辺は系のエネルギー尺度を与える。

分子場理論を用いると静的な物理量を求めることができる。たとえば不純物による比熱は  $\rho_f^*(0)$  によって決まる。

$$\rho_f^*(0) = \frac{n\tilde{\Delta}}{\pi(\tilde{\epsilon}_f^2 + \tilde{\Delta}^2)} = \frac{n}{\pi\tilde{\Delta}} \sin^2\left(\frac{\pi n_f}{n}\right). \quad (67)$$

比熱係数  $\gamma$  は，

$$\gamma = \frac{1}{3} \pi^2 \rho_f^*(0), \quad (68)$$

のように求まる。一方帯磁率は

$$\chi = C_J \rho_f^*(0) \rightarrow C_J n_f / T_0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (69)$$

となる。ここで  $C_J$  はキュリー定数である。これらの結果は  $n$  の大きい極限で正しい。その理由はこの極限でランダウパラメーターが消えるからである。

平均場近似でのグリーン関数  $G_f^*(z)$  と厳密な  $G_f(z)$  との関係のみよう。後者は自己エネルギー  $\Sigma_f(z)$  を用いると

$$G_f(z) = [z - \epsilon_f + i\Delta\text{sgn}(\text{Im}z) - \Sigma_f(z)]^{-1}, \quad (70)$$

と書ける。ここで  $\Delta = \pi W_0$ 。準粒子の寄与を引き出すために  $\Sigma_f(z)$  をフェルミ順位  $z = 0$  の周りで展開する:

$$\Sigma_f(z) = \Sigma_f(0) + \left. \frac{\partial \Sigma_f(z)}{\partial z} \right|_{z=0} z + O(z^2). \quad (71)$$

ここで、フェルミ液体状態では微分は実数になる。すると

$$G_f(z) = a_f G_f^*(z), \quad (72)$$

となる。  $a_f = [1 - \Sigma_f'(0)]^{-1}$  は繰り込み因子と呼ばれる。平均場近似でのグリーン関数  $G_f^*(z)$  との関係は、

$$\Sigma_f(0) = \lambda, \quad a_f = r^2 \quad (73)$$

によってつく。従って、平均場近似は繰り込みを実行する最も単純な枠組みと捉えることができる。

### 3.2.2 局所的フェルミ流体の動的帯磁率

f 軌道の縮退度  $n$  が減少するとともに準粒子間の相互作用は大きくなる。準粒子に対する乱雑位相近似 (RPA) によってフェルミ液体効果を考慮することにしよう [6]。この近似は低エネルギー極限で厳密である。Anderson モデルでは、ランダウ・パラメータが一つの独立な成分だけを持つことから、実際的でもある。f 電子の動的帯磁率は次のように表される:

$$nC_J \chi(\omega)^{-1} = nC_J \chi_1(\omega)^{-1} - U_{eff}, \quad (74)$$

ここで  $-U_{eff}$  はランダウパラメータ  $Z_0/\rho^*(\mu)$  に対応する有効相互作用である。  $\chi_1(\omega)$  は準粒子の分極関数であり、

$$\chi_1(\omega) = nC_J \int d\epsilon_1 \int d\epsilon_2 \rho_f^*(\epsilon_1) \rho_f^*(\epsilon_2) \frac{f(\epsilon_1) - f(\epsilon_2)}{\omega - \epsilon_1 + \epsilon_2 + i\delta}, \quad (75)$$

と与えられる。  $\rho_f^*(\epsilon_1)$  は準粒子の  $f$  成分状態密度である。eq.(74) の両辺の虚数部を比較すると

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \frac{\chi(\omega)}{\omega \chi^2} = \frac{\pi}{nC_J}, \quad (76)$$

を得る。ここで  $\chi_1(0) = nC_J \rho_f^*(0)$  の関係を用いた。eq.(76) は Korringa-Shiba の関係と呼ばれる [19]。この結果は相互作用の強さには依存しないことに注意する。

### 3.3 希薄 f 電子系の非フェルミ液体状態

軌道とスピンの絡み合いの効果は、上に説明した最も簡単な場合から、より複雑な場合まで様々である。スピン 1/2 の近藤モデルの基底状態は、局所的フェルミ流体になることを説明したが、伝導帯が 2 枚以上あると事情は変わってくる。eq.(19) において、  $s_c$  が次のように与えられる場合を考えよう:

$$s_c = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \sum_{m=1}^n \sum_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}m\alpha}^\dagger \sigma_{\alpha\beta} c_{\mathbf{p}m\beta}. \quad (77)$$

ここで、  $m$  はバンドのインデックス (これをチャンネルと呼ぶ) を表わし、eq.(19) での  $S_f$  の大きさ  $S$  は 1/2 に限らないものとする。このようなモデルを複数チャンネル近藤モデルと呼ぶ。

このモデルの基底状態は 3 種類あり、次の条件

$$(i) n = 2S; \quad (ii) n < 2S; \quad (iii) n > 2S, \quad (78)$$

で決まる [20]。(i) の場合には、基底状態は近藤単重項 (局所的フェルミ液体) である。それぞれのチャンネルの電子がスピン  $1/2$  ずつ遮蔽するので、全体のスピン  $S$  は  $n$  個のチャンネルで完全に遮蔽される。繰り込みの固定点は  $J = \infty$  に対応する。(ii) の場合には、各チャンネルが不純物スピンを遮蔽しても、まだ  $S - n/2$  の大きさのスピンが基底状態に残る。したがって、残りのスピンに対する固定点は  $J = 0$  である。(iii) の場合には新しい状況が生ずる。繰り込みの固定点  $J = J_c$  で  $J_c$  は  $0$  でも無限大でもない [20]。これを理解するために仮想的に  $J = \infty$  の場合を考えよう。この時、伝導電子は不純物スピンを過剰に遮蔽し、大きさ  $n/2 - S$  の逆向きスピンが不純物の近傍に生ずる。この過剰スピンは、残りの伝導電子には新たな不純物スピンと映り、反強磁性的な交換相互作用を生ずる。なぜなら、過剰スピンと逆向きのスピンを持つ伝導電子だけが、パウリの排他律に妨げられずに、不純物サイトに飛び込む中間状態を持てるので摂動エネルギーを得るからである。これは、超交換相互作用が反強磁性になる事情と同じである。従って、 $J = \infty$  は固定点ではありえない。もちろん  $J = 0$  も固定点にはなれないので、その中間に収まるほかないのである。この事情は図 5 に示してある。



図 5: 有限な繰り込み固定点

上の議論により、系の基底状態は、遮蔽するチャンネルの数とスピンの大きさという単純なパラメータで決まることがわかる。Nozieres-Blandin は、実際の系では結晶の異方性のためにチャンネルの縮退が解けて  $n$  が少なくなり、(i) と (ii) はあっても、(iii) の場合は実現しないと考えた [20]。その後 Cox は局在スピンの代わりに、四重極の擬スピンを考えると、伝導電子には元のスピンもあるので、(iii) の状況を実現できることを指摘した [21]。これを四重極近藤効果と呼ぶ。しかし、エネルギーを下げるために格子の変形 (ヤーン・テラー変形と呼ぶ) が起きると、軌道縮退は解けるので、やはり (iii) は不安定になる。四重極近藤効果に伴う非フェルミ液体状態が実際の系で起きるか否かは、実験との対比で決められるべきだろう。

## 4 重い電子系

### 4.1 Anderson 格子と近藤格子

希土類の  $4f$  電子は、 $5d$  や  $6s$  電子よりも原子核に近い位置にあるので、固体内にあっても、孤立原子とあまり変わらない波動関数を持つ。すなわち非常に強い局在的性格を持っていて、エネルギー・バンドを作りにくい。一方、 $5d$ ,  $6s$  等の原子軌道に由来する幅の広いバンドが別があり、 $4f$  電子と様々な相互作用を行なう。しかし結晶中の化学結合の仕方と格子構造によっては、任意の希土類イオンの  $4f$  電子数を 1 個だけ変化させる際のエネルギー変化が小さい場合がある。これは、その準位  $\epsilon_f$  がフェルミ準位に接近している場合である。同様の事情は、アクチナイド類の  $5f$  電子についても言える。後者では  $4f$  電子に比べて、周りとの結合が大きいため、孤立原子との類似性は弱くなる。このような場合、 $f$  電子は、周りを囲む原子 (これをしばしばリガンドと呼ぶ) の波動関数と量子力学的に混ざって、結晶中にしみだす。これは、 $f$  電子の占有数が整数から外れることを意味する。占有数は希土類イオンの原子価に関係するので、これを価数揺動と呼んでいる。価数揺動は電荷とスピン両方の揺動をもたらすことに注意する。

$f$  電子を多数含む結晶中の価数揺動を記述する最も基本的なモデルは、Anderson 格子である。そのハミ

ルトニアン  $H_{AL}$  は、不純物 Anderson モデルを周期的に並べた格好をしていて、

$$H_{AL} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left( \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + V_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger f_{\mathbf{k}\sigma} + V_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \right) + \sum_{i\sigma} \left( \epsilon_f n_{i\sigma}^f + \frac{1}{2} U \sum_{\sigma' (\neq \sigma)} n_{i\sigma}^f n_{i\sigma'}^f \right), \quad (79)$$

で与えられる。ここで  $n_{i\sigma}^f = f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}$  は格子点  $i$ 、スピン  $\sigma$  を持つ  $f$  電子の個数演算子である。 $\sigma$  は、軌道縮退がある場合にはフント規則で与えられる全角運動量  $J$  の  $z$  成分と考える。この縮退度を  $n (= 2J + 1)$  とする。結晶場を考慮すれば  $2J + 1$  重の縮退は解ける。議論の都合でこれを無視することがあるが、 $\sigma$  を結晶場内の状態を指定するものと解釈することもある。伝導帯は現実にはクラマース縮退以上の縮退は持たないので、複数の非縮退伝導帯を考慮したほうが実際に近い。しかし簡単化のため、しばしば  $f$  電子の軌道縮退に対応した縮退が伝導帯にもあるものとする。

さて、 $U$  を十分大きいと仮定した上で  $f$  準位  $\epsilon_f$  を深くしていくと、 $f$  電子数の揺動は抑えられる。電荷の自由度が抑圧されると、それぞれのサイトには  $f$  電子状態の角運動量に対応する自由度だけが残る。簡単のため  $f$  電子状態には軌道縮退がないとして、そのスピンを  $S_f$  と書くと、希土類不純物が格子点  $\mathbf{R}_i$  にある場合の相互作用ハミルトニアンは、2章で導いたように

$$H_{sf}(\mathbf{R}_i) = J_{sf} \mathbf{S}_f(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{s}_c(\mathbf{R}_i), \quad (80)$$

と表される。ここで  $\mathbf{s}_c(\mathbf{R}_i)$  は希土類サイトでの伝導電子のスピン演算子であり、伝導電子の生成・消滅演算子を用いると、

$$\mathbf{s}_c(\mathbf{R}_i) = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \sum_{\alpha\beta} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_i] c_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} c_{\mathbf{p}\beta}$$

と表せる。ここで  $N$  は格子点の総数、 $\boldsymbol{\sigma}$  はパウリ行列のつくるベクトルで、伝導電子のバンドは1枚だけあるとした。(80)式で交換相互作用  $J_{sf}$  は Anderson モデルのパラメータと

$$J_{sf} = 2V^2 \left( \frac{1}{|\epsilon_f|} + \frac{1}{\epsilon_f + U} \right), \quad (81)$$

のように結ばれている。(2章の eq.(17) を参照) ここで、 $V^2$  は  $|V_{\mathbf{k}}^2|$  の波数平均である。 $J_{sf} > 0$  (反強磁性的結合) の相互作用により、近藤効果が誘起される。

このような交換相互作用がある  $f$  電子サイトが周期的に配列した系を近藤格子と呼ぶ。そのハミルトニアンは

$$H_{KL} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_i H_{sf}(\mathbf{R}_i), \quad (82)$$

と書ける。実際の物質では  $J_{sf} < 0$  にもなり得るが、これは  $H_{AL}$  の他に、 $f$  電子と伝導電子のクーロン相互作用に起因して強磁性的な相互作用 (フント規則) が存在するためである。近藤格子の名称は本来  $J_{sf} > 0$  の場合だけに使われるべきであるが、強磁性的近藤格子などと形容矛盾した表現も実際には使われている。

Anderson 格子と近藤格子の磁気秩序については、次のような機構が基本的である。伝導電子は  $f$  電子との交換相互作用でスピン分極し、他の格子点に分極が伝播する。4f 電子のサイトが複数並んでいれば、伝導電子を媒介にして、間接的な 4f スピン同士の交換相互作用が生ずる。これを Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY) 相互作用と呼ぶ [22]。基底状態に磁気秩序があるかどうかは、基本的には近藤温度  $T_K$  と RKKY 相互作用による磁気秩序安定化エネルギー  $E_{RKKY}$  との競合で決まる。両者の表式は

$$T_K = D \ln \left( \frac{\epsilon_f}{nV^2\rho_c} \right), \quad E_{RKKY} = z_n J_{sf}^2 \rho_c$$

で与えられる。ここで  $z_n$  は相互作用する隣接サイト数、 $\rho_c$  は伝導電子のフェルミ準位におけるスピンあたり状態密度である。縮退度  $n$  が大きくなると、 $T_K$  は  $E_{RKKY}$  よりも急速に増大する。重い電子系  $\text{CeRu}_2\text{Si}_2$ 、

CeCu<sub>6</sub> などでは、極低温まで磁気秩序が見出されないが、これらの結晶場準位の縮退度は  $n = 2$  であり、大きくはない。それにもかかわらず  $T_K$  が大きい原因は、結晶場の励起準位や、スピン軌道分裂した準位などの存在が影響していると考えられている [23]。これは、通常の希土類化合物を低温にすると RKKY 相互作用が支配的になり、磁気秩序が生ずることと対比される。また重い電子系では、異常に小さい磁気モーメントを持つ弱い反強磁性が生ずる場合がある。f 電子にわずかな遍歴的性格が存在し、局在的性格と共存すること、またバンド構造のネスティングなどの特殊性が、モーメントの非常に小さい磁気秩序の発生に関係があると示唆されている [6]。

## 4.2 運動量分布とフェルミ面の大きさ

フェルミ液体では、相互作用がいかに強くとも、準粒子の状態と理想フェルミガスの励起状態とは一対一の対応がある。これにより、基底状態における準粒子の占有状態も理想フェルミガスと対応がつく。すなわちフェルミ面で囲まれる体積は相互作用によらない。これを Luttinger の総和則と呼ぶ [24]。しかし強相関系では、元の電子の運動量分布は、準粒子の運動量分布とはかなり異なっている。すなわち、f 電子の運動量分布は大域的には局在電子とあまり変わるところはなく、フェルミ波数の近傍にだけフェルミ液体の特徴が現れる。

問題を具体的にするために 1 次元の Anderson 格子で全電子数  $N_e$  が格子点の数  $N_L$  の  $7/4$  倍である場合を考える [6]。後の章で述べるように、1 次元では実際にはフェルミ液体は不安定であるが、今はフェルミ波数の大きさのみを考えるのでこの問題は影響しない。f 電子が遍歴的であれば、フェルミ波数は  $7\pi/(8a)$  である。2 枚の混成バンドのうち下のバンドが部分占有され、上の混成バンドは空である。ここで  $a$  は格子定数。一方、混成がない場合にはサイトあたりの f 電子数は 1 であり、伝導電子の個数  $3N_L/4$  に対応してフェルミ波数は  $k = 3\pi/(8a)$  となる。運動量分布  $n_k^c, n_k^f$  は図 6 で示したようになる。f 電子の運動量分布が波

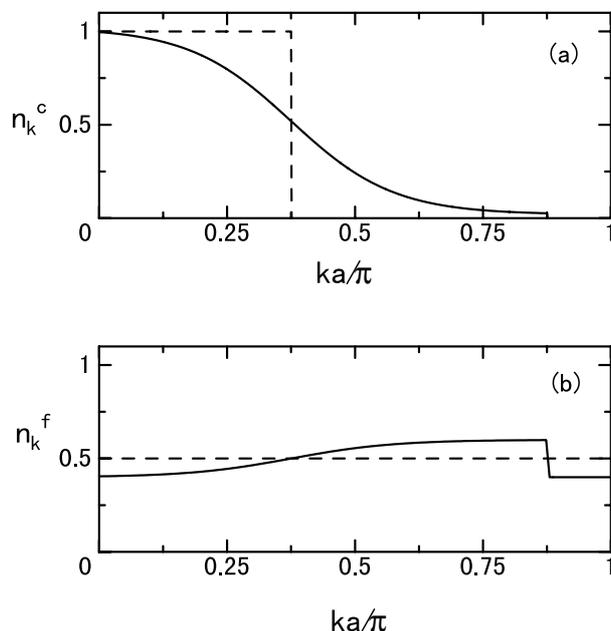


図 6: 運動量分布の模式図。(a) 伝導電子, (b) f 電子。破線は混成相互作用がない場合の分布を示す。

数依存性を持つことは、その遍歴性すなわち電荷の揺らぎを前提とする。図 6 から見えるように、フェルミ面のところで、分布関数に跳びがあることが、フェルミ液体状態の特徴である。次のような波動関数を

取ると、この事情を見やすい [25]。

$$\Psi_B = \mathcal{P} \prod_{k\sigma} (1 + \alpha_k f_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}) \phi_{N_e} = \mathcal{P} \exp \left( \sum_{k\sigma} \alpha_k f_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} \right) \phi_{N_e}, \quad (83)$$

ここで  $\phi_{N_e}$  は  $N_e$  個の伝導電子と空の f 軌道がある状態である。射影演算子  $\mathcal{P}$  は、任意サイトでの f 電子の 2 重占有状態を排除するもので、Gutzwiller projection と呼ばれる。変分パラメータ  $\alpha_k$  はエネルギーを最小にするように決められる。 $U$  が大きい場合には、変分モンテカルロ法の数値計算により、図 6 と同様の運動量分布が得られている [26]。

もし  $|\alpha_k| \gg 1$  なら、すべてのサイトの f 電子占有数はほとんど 1 である。この場合、 $n_k^f$  の不連続性は小さくなるが、その位置は変わらない。今考えている  $N_e/N_L = 7/4$  の場合には、 $k = 7\pi/(8a)$  に対応するフェルミ面を「大きなフェルミ面」と呼ぶ。一方、連続的ではあるが大きい  $n_c^k$  の変化は、 $k = 3\pi/(8a)$  の周辺で起こる。これは  $N_c$  だけで決まるもので、ここに分布関数の跳びがあれば、「小さなフェルミ面」が実現することになる。

特別な場合として  $N_e = 2N_L$  を考える。この場合  $\Psi_B$  に対応する電子分布は、下の混成バンドを完全に埋めるものである。これは、バンド理論による絶縁体につながるものであるが、 $U$  が大きい場合には、有限温度の効果は通常の絶縁体とは大きく異なる。従って、このような状態を「近藤絶縁体」と呼ぶ。1次元の近藤格子に着いては、詳しい数値的な研究がある [27]。

### 4.3 ハバードモデルと $t$ - $J$ モデル

Anderson 格子や近藤格子は、局在性の強い f 電子の他に伝導を担う電子が存在する場合のモデルである。それに対して電子は 1 種類しかなく、これが強い相関をしつつ動き回る、と想定するのがハバードモデルである。このモデルは個数演算子を  $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$  として次のように書ける：

$$H_{Hub} = -t \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + c_{j\sigma}^\dagger c_{i\sigma}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}. \quad (84)$$

ここで  $U$  が  $t$  よりもはるかに大きく、かつ電子数  $N_e$  が格子点数  $N$  と同じ場合には、電荷の局在化が起こる。これがモット絶縁体に対応する。低いエネルギーを持つスピン自由度の運動は、ハイゼンベルグモデルで記述される。

強相関ハバード・モデルの  $N_e = N$  近傍での有効モデルとして、同一原子に電子が 2 個入ることを禁じた空間で記述される次のモデル

$$H_{tJ} = H_t + J \sum_{\langle ij \rangle} \left( \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \frac{1}{4} n_i n_j \right), \quad (85)$$

がしばしば用いられる。ここで、 $n_i$  は全スピンの個数演算子、 $H_t$  はハバード・モデルの運動エネルギー項と同じであるが、今は二重占有を排除する部分空間での演算子である。このモデルを  $t$ - $J$  モデルという。 $t$ - $J$  モデルの高密度極限では、 $H_t$  は不活性になり、ハイゼンベルグモデルが残る。 $t$ - $J$  モデルをハバード・モデルの有効モデルとすると  $J = 4t^2/U$  の関係があるが、 $t$ - $J$  モデル自体では  $t$  と  $J$  を独立なパラメータと考え、電子密度も任意とすることができる。 $t$ - $J$  モデルに対しては、高温超伝導と関連して活発な研究がある [28]。

### 4.4 軌道自由度の効果

最近軌道縮退のある系への興味が高まっている。重い電子系の一つである  $\text{CeB}_6$  では異なる軌道が  $T_Q = 3.3\text{K}$  以下で交替的に整列する秩序が存在する。交替的軌道整列を直接計ることはむずかしいが、この整列

下で磁場をかけると、誘起されるモーメントの大きさが軌道の種類に依存するので、一様な成分を差し引くと反強磁性体のようなモーメントのパターンが生ずる。このパターンは中性子の磁気散乱や NMR で観測されている [29, 30]。CeB<sub>6</sub> に外部磁場  $H$  をかけると、面白いことに四重極秩序温度  $T_Q(H)$  は磁場とともに増大する。この二つの転移に伴い比熱の異常も観測されている。無磁場では  $T_Q$  での比熱の異常は小さいが、磁場とともに大きく育つ。反対に  $T_N$  での異常は無磁場では大きく、磁場とともに減少する [31]。このような挙動は、軌道秩序形成において、揺らぎが重要な役割を演じていることを示している。

軌道自由度とスピンの絡み合いを含む簡単なモデルは次のように与えられる:

$$H = - \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} \sum_{\langle ij \rangle \sigma} c_{i\mu\sigma}^\dagger c_{j\nu\sigma} + \sum_i H_{int}^{(i)},$$

$$H_{int}^{(i)} = U \sum_{\mu} n_{i\mu} n_{i\mu} + U_{AB} n_{iA} n_{iB} - J_{AB} (\mathbf{S}_{iA} \cdot \mathbf{S}_{iB} + \frac{3}{4} n_{iA} n_{iB}).$$

ここで各サイトにおける 2 種類の原子軌道  $A, B$  を区別する添え字を  $\mu, \nu$  とし、 $\langle ij \rangle$  は最近接サイト対、 $n_{i\mu}$  はサイト  $i$ , 軌道  $\mu$  にある電子の個数演算子、 $S_{i\mu}$  はスピン演算子である。また  $U$  は同一軌道間のクーロン斥力、 $U_{AB}$  ( $< U$ ) は異なる軌道間のクーロン斥力である。 $J_{AB}$  の項は、平行スピン間の斥力を  $J_{AB}$  ( $> 0$ ) だけ小さくするように働き、フント規則に対応している。

この系でサイトあたり 1 個の電子がある場合の有効ハミルトニアンを求めてみる。一般の場合はかなり複雑な表式になるので、扱いを簡単にするために跳び移り積分は軌道に依存しないとする。即ち  $t_{\mu\nu} = t \delta_{\mu\nu}$  を仮定する。こうすると、軌道の自由度を擬スピナーとして扱うことにより、計算が簡単になる。即ちサイト  $i$  に対して、

$$\tau_i = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sum_{\rho} c_{i\mu\rho}^\dagger \sigma_{\mu\nu} c_{i\nu\rho}$$

と定義すると、サイト対の軌道自由度に対して、スピンと同様に軌道単重項  $L_\tau = 0$  と軌道 3 重項  $L_\tau = 1$  で  $2 \times 2 = 4$  通りの軌道の組み合わせを表現できる。

局在電子の極限から  $t$  に関する 2 次の摂動論を行なうと、隣り合うサイトにある電子対のエネルギー  $E_{pair}$  は次のように求められる:

$$E_{pair} = \begin{cases} 0, & (L_\tau = 1, \quad S = 1) \\ -4t^2/U, & (L_\tau = 1, \quad S = 0) \\ -4t^2/(U_{AB} - J_{AB}), & (L_\tau = 0, \quad S = 1) \\ -4t^2/U_{AB}. & (L_\tau = 0, \quad S = 0) \end{cases} \quad (86)$$

図 7 はこの摂動過程を模式的に示したものである。サイト  $j$  から  $i$  に跳び移る過程も同様に存在するので、因子として 4 が  $t^2$  につく。ちなみに Anderson モデルから近藤モデルを導く際にも類似の計算をしていたが、その場合には中間状態として伝導電子の 2 重占有状態が入らないので、 $V^2$  の係数は 4 ではなく 2 となる。式 (86) の結果から、相互作用エネルギーを最も有利にするのは、異なる軌道にスピン 3 重項を形成する配置 ( $L_\tau = 0, S = 1$ ) であることがわかる。スピンのそろう理由は、フント規則により中間状態のエネルギーが低くなるからである。さて、有効ハミルトニアンを出すために次のような射影演算子を導入する:

$$P(L_\tau = 1) = \tau_1 \cdot \tau_2 + \frac{3}{4}$$

$$P(L_\tau = 0) = -\tau_1 \cdot \tau_2 + \frac{1}{4}.$$

これは、スピンに対する射影演算子で  $S \rightarrow \tau$  の置き換えをしたものである。スピンに対しても同様な射影演算子を用いて、各配置のエネルギーと対照させると、有効ハミルトニアンとして、次の形

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} [J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + K \tau_i \cdot \tau_j + I (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) (\tau_i \cdot \tau_j)], \quad (87)$$

が得られる。ここで、各相互作用定数は

$$\begin{aligned} J &= t^2 \left( -\frac{1}{U_{AB} - J_{AB}} + \frac{1}{U_{AB}} + \frac{3}{U} \right), \\ K &= t^2 \left( \frac{3}{U_{AB} - J_{AB}} + \frac{1}{U_{AB}} - \frac{1}{U} \right), \\ I &= 4t^2 \left( \frac{1}{U_{AB} - J_{AB}} - \frac{1}{U_{AB}} + \frac{1}{U} \right), \end{aligned}$$

のように与えられる。

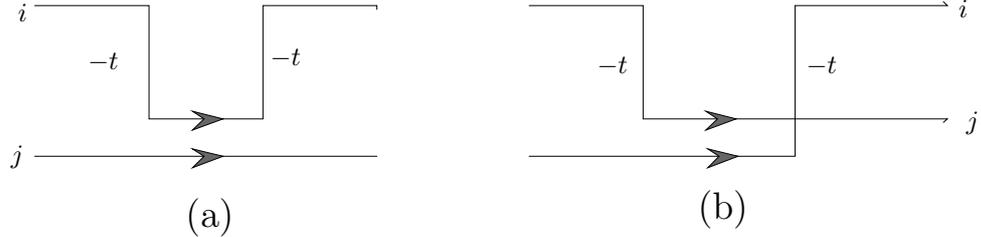


図 7: 仮想ホッピングによるスピンと軌道自由度の交換過程。サイト  $i$  から  $j$  へ跳ぶ過程を示す。

式 (87) で与えられるモデルは、ヤーン・テラーイオンを持つペロブスカイト型酸化物に関係して古くから議論されている [32, 33]。このような絶縁体化合物では、高温相が立方晶構造でも、自発的な対称性低下で低次元磁性が生ずる。この原因は、軌道が交替的な秩序状態に入り、スピンがそれに合わせて強磁性的に揃うことによるエネルギーの低下である。例えば  $\text{LaMnO}_3$  では、Mn の局在 3d 軌道に縮退があり、異なる形の波動関数が縮退している。この縮退は立方対称性より低い対称性の下では解け、エネルギーの利得が生ずる。この結果、結晶全体として対称性が低下することが有り得る。これは協力的ヤーン・テラー効果と呼ばれている。ペロブスカイト系では、軌道整列の直接的証拠は見出されていないが、格子の歪み、異方的磁気構造の自発的生成などでその存在は確実視されている。最近では、特殊な回折実験により、軌道秩序を直接観測する努力がなされている。

一方、f 電子系では、軌道自由度の効果はより複雑である。例えば、 $\text{CeB}_6$  では、 $T_Q = 3.3\text{K}$  よりも更に温度を下げると、やっと  $T_N = 2.4\text{K}$  で反強磁性秩序が生ずる。磁気秩序が強磁性でないことは、式 (87) とは別の機構の存在を示している。反強磁性のパターンは、隣り合うスピンの直交していて、単純な交換相互作用ではエネルギーの利得がどうして起きるのか理解できない。軌道とスピンの絡み合いで、このようなパターンが安定化されていると考えられるが、具体的な理論はまだ作られていない。

#### 4.5 無限次元の動的有効媒質

強相関電子系の近似的理論を構成する際に、現実の 3 次元系を高次元の極限から考えることが有用である。古典スピン系に対する分子場理論は、相互作用する相手の数が無限大で厳密になることが知られている。強相関系にたいする無限次元理論は、量子性に起因して分子場を動的とみなす点の特徴である。これを取り入れた理論は、かなり前に動的有効媒質理論として提案されていた [34]。その後、この理論は無限次元理論として、広く知られるようになった [35, 36, 28]。無限次元理論はハバードモデルや Anderson 格子系に対しては、近藤効果とサイト間相互作用を共に取り入れる形になっている。この理論の成功を示している一例は、電子の状態密度において、重い電子を表わすフェルミ面近くの鋭い構造と、クーロン斥力  $U$  だけ分裂した局在電子の構造が共存することを実際に導出したことである。

動的有効媒質の直感的な考え方を図 8 に示す。(グリーン関数を用いるので、わからない読者はこの節を

読み飛ばしていただきたい。) Anderson 格子系における f 電子グリーン関数のサイトに関する対角成分は,

$$D_f(z) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ z - \epsilon_f - \frac{V^2}{z - \epsilon_{\mathbf{k}}} - \Sigma_f(z) \right]^{-1} = [z - \epsilon_f - \lambda(z) - \Sigma_f(z)]^{-1}, \quad (88)$$

のように書ける。ここで,  $\lambda(z)$  は周囲の伝導電子との混成効果を, 動的な有効媒質として表現したことに相当する。このステップを図 8(b) に示す。次に, 動的有効媒質中の不純物問題を解く際に,  $U$  の効果を自己エネルギーとして取り込む。これは  $\Sigma_f(z)$  を  $\lambda(z)$  の汎関数として求めることに相当する。一方  $U = 0$  の場合の有効媒質を  $\lambda_0(z)$  と書くことにすれば, 式 (88) の構造から  $\lambda(z)$  自体は,

$$\lambda(z) = \lambda_0(z - \Sigma_f(z)) + \Sigma_f(z) \quad (89)$$

と求められる。即ち, 有効媒質の構造は, 伝導電子のバンド構造と混成の構造によって定まる。従って  $\Sigma_f(z)$  も,  $\lambda(z)$  を通じてこれらの一体的パラメータに依存する。一方, 有効不純物系と全体の系の自己エネルギーを, どちらも  $\Sigma_f(z)$  で与えることの正当性は, 変分原理によって示すことができる [35]。この過程を図 8(c) に示す。これで, 方程式系が閉じる。

実際に有効媒質を決定するには, まず試みの  $\lambda(z)$  で特徴づけた動的有効媒質中の不純物問題を解き, これから決まる  $\Sigma_f(z)$  とグリーン関数  $D_f(z)$  から

$$\lambda(z) = z - \epsilon_f - \Sigma_f(z) - D_f(z)^{-1} \quad (90)$$

によって,  $\lambda(z)$  の第 2 近似を得るのが便利である。このような逐次近似を繰り返して, 収束が得られれば問題が解けたことになる。

ハバードモデルに対する無限次元理論では, グリーン関数の対角成分を  $D(z)$  として, 式 (88) に対応して

$$D(z) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [z - \epsilon_{\mathbf{k}} - \Sigma(z)]^{-1} = [z - \lambda(z) - \Sigma(z)]^{-1}, \quad (91)$$

が, 解くべき方程式になる。Anderson 格子でもハバードモデルでも, 有効不純物問題を解くのに際して, 仮想的 Anderson 不純物のハミルトニアンを扱うのが便利である。こうすると, 量子モンテカルロ法や数値的繰り込み群の手法が使える。この方法の詳細について, ここで書くことはできないが, 参考文献を参照されたい [6, 35, 36, 28]。

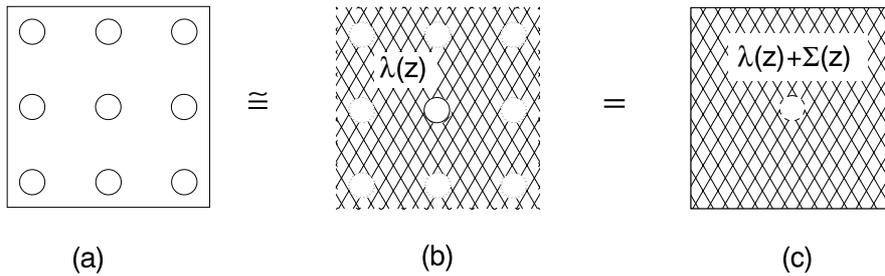


図 8: 動的有効媒質の構成。(a) 元の格子, (b) 有効不純物への置き換え, (c) 局所的相互作用の自己エネルギーへの取り込みを示す。

## 5 1次元の朝永・ラuttingenジャー液体と分数統計

### 5.1 朝永-Luttinger モデル

1次元の電子系が強い相互作用効果を示すことは古くから知られていたが、朝永振一郎は相互作用の効果をもっと巧妙な方法で取り入れた [37]。簡単のために、まずスピンのない場合を考える。運動エネルギーは

$$H_{kin} = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k \quad (92)$$

となる。連続体では適当な単位系で  $\epsilon_k = k^2$  となる。これが、朝永の考えた場合に相当する。一方、格子モデルで強束縛近似をとると、 $\epsilon_k = -t \cos k$  とできる。この場合、 $k$  はブリルアンゾーンの境界  $\pm\pi$  の中に制限する。ただし、格子定数を 1 とした。フェルミ波数  $k_F$  の近傍だけが重要な場合には、そのまわりで  $\epsilon_k$  を展開することが許される。すなわち、

$$\begin{aligned} \epsilon_k &\sim (k - k_F)v_F, & (k \sim k_F) \\ \epsilon_k &\sim -(k + k_F)v_F, & (k \sim -k_F) \end{aligned} \quad (93)$$

と近似する。この様子は、図 9 に示されている。ここで、 $k = \pm k_F$  で引いた接線は、線形スペクトル近似を表す。

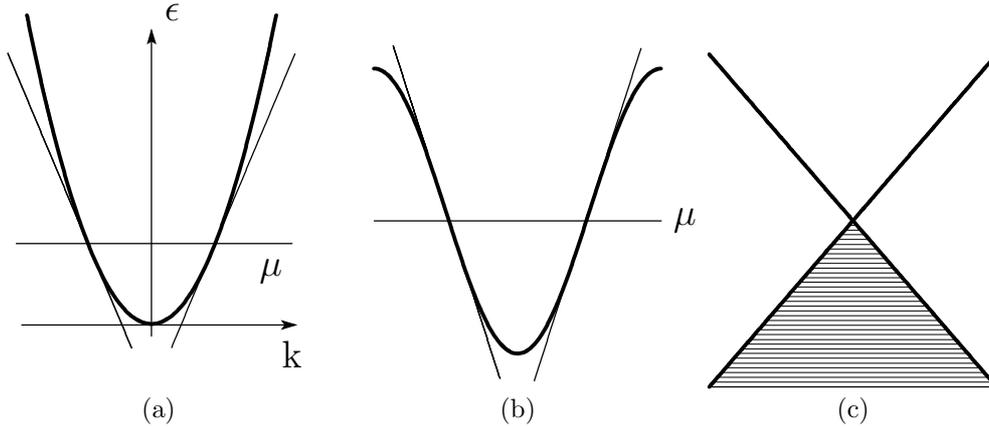


図 9: 1次元電子のスペクトル。(a) 自由電子, (b) 強束縛電子, (c) Luttinger モデル。(a),(b) では、線形に近似したスペクトルを細線で示す。(c) は線型スペクトルを、 $\epsilon \rightarrow -\infty$  まで外挿したもので、Luttinger model と呼ばれる [38]。

朝永の方法で、本質的な役割を果たす量は次の密度演算子である。

$$\rho_{\pm}(q) = \sum_k a_{\pm,k}^\dagger a_{\pm,k+q}, \quad (94)$$

ここで、 $\pm$  はフェルミ波数付近の運動量が正か負かを示す。座標空間で定義した真の密度演算子は、もちろん互いに可換であるが、上で定義したブランチごとの密度演算子は、次のような交換関係を満たす。

$$[\rho_{\alpha}(q), \rho_{\alpha'}(-q')] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{qq'} \frac{\alpha q L}{2\pi}. \quad (95)$$

密度演算子が交換しないのは、非常に奇妙なことである。なぜ、このような非可換性が生ずるかを見よう。波数が取り得る下限を  $k_0$  とすると、交換関係は以下のように計算される。

$$[\rho_+(q), \rho_+(-q)] = \sum_k (\hat{n}_{k-q} - \hat{n}_k) = \sum_{k_0-q \leq k < k_0} \hat{n}_k = \frac{Lq}{2\pi}. \quad (96)$$

ここで注意すべきことは、元々発散している和の引き算から有限の結果を出していることである。結果は  $k_0$  に依存しない。朝永は、バンドの底付近の電子分布は相互作用によって影響されないと考えて、 $k_0$  として十分小さいものを考えて正しい交換関係に至っている。一方、Luttinger は図 [?](c) のスペクトルを定義通りに持つ有限系を考えたので、この交換関係は 0 とした。これ自体は正しいことであるが、負のエネルギー状態が無限個ある中に有限粒子系を詰めようとする、基底状態が定義できない。従って、無限自由度の問題に直面せざるを得ないが、この場合、もはや有限系の交換関係は成立しないのである。このパラドックスを anomaly と呼ぶ [39]。この問題のデリケートさは、Luttinger さえも間違えてしまったことでもうかがえる [40]。

さて、運動エネルギー eq.(92) と密度演算子の交換関係は簡単な計算から

$$[H_0, \rho_\alpha(q)] = v_F \alpha q \rho_\alpha(q) \quad (97)$$

となるが、eq.(96) を用いると次の形

$$H_{0b} = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{q>0, \alpha=\pm} : \rho_\alpha(q) \rho_\alpha(-q) : \quad (98)$$

も全く同じ交換関係をもたらすことがわかる。ここで、コロンは normal order と呼ばれるもので、基底状態に作用すると 0 になる演算子があればこれを右側に移すことを意味する。具体的には

$$: \rho_\alpha(q) \rho_\alpha(-q) : \equiv \begin{cases} \rho_+(-q) \rho_+(q) & (\alpha = +) \\ \rho_-(q) \rho_-(-q) & (\alpha = -). \end{cases} \quad (99)$$

そこで、 $H_0$  を  $H_{0b}$  で置き換えても、密度演算子の運動として同一のものが得られる。これが朝永の方法の核心である。

さて、相互作用項として以下のものを導入する。

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2L} \sum_{q, \alpha=\pm} [2g_2 : \rho_\alpha(q) \rho_{-\alpha}(-q) : + g_4 : \rho_\alpha(q) \rho_\alpha(-q) :] \quad (100)$$

すなわち、 $g_2$  は右と左のブランチの相互作用、 $g_4$  は同じブランチの中の相互作用である。全ハミルトニアン  $H_{0b} + H_{\text{int}}$  において、密度演算子の添え字  $\pm$  に関する非対角項が消えるように、次のような変換(「ボゴリューボフ変換」と呼ばれるものの例)を行う。

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}_+(q) \\ \hat{\rho}_-(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi, \sinh \phi \\ \sinh \phi, \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_+(q) \\ \rho_-(q) \end{pmatrix} \quad (101)$$

これはユニタリ変換である ( $2 \times 2$  の変換行列はユニタリ行列ではないことに注意)。ユニタリ変換であることは、演算子の交換関係が保存していることでわかる。別の表現では

$$U = \exp \left[ \sum_{q \neq 0} \frac{2\pi\phi}{Lq} \rho_+(q) \rho_-(q) \right]$$

とすると、 $U^{-1} = U^\dagger$  であり、 $\hat{\rho}_\alpha(q) = U \rho_\alpha(q) U^\dagger$  となることが示せる。ボゴリューボフ変換の(虚数)回転角  $\phi$  は

$$\tanh 2\phi = -g_2 / [2\pi v_F^*] \quad (102)$$

と求められる。ここで、 $v_F^* = v_F + g_4/(2\pi)$  である。このようにすると、変換されたハミルトニアンは

$$H = \frac{2\pi v_s}{L} \sum_{q>0, \alpha} : \hat{\rho}_\alpha(q) \hat{\rho}_\alpha(-q) : \quad (103)$$

と対角化される。ここで

$$v_s/v_F^* = \cosh^{-1} 2\phi \quad (104)$$

と定義した。これが、相互作用を繰り込んだ密度振動の速度に対応する。双曲線関数の関係式を用いると、 $v_s/v_F^*$  は次のように  $g_2, g_4$  と関係づけられる。

$$[\cosh 2\phi]^{-2} = 1 - \tanh^2 2\phi = 1 - \left( \frac{g_2}{2\pi v_F^*} \right)^2 \quad (105)$$

さて、上で行った対角化は調和振動子系のハミルトニアンでいうと  $\omega a^\dagger a$  の形に対応する。一方  $Q^2 + P^2$  の形に対応するものを用いた方が便利なこともある [41]。後者は、

$$H = \frac{\pi v_s}{L} \sum_{q>0} \left[ \frac{1}{K} : N(q)N(-q) : + K : J(q)J(-q) : \right] \quad (106)$$

となる。ここで、右と左のブランチを合わせた密度揺らぎと運動量揺らぎを記述するものとして

$$N(q) = \rho_+(q) + \rho_-(q), \quad (107)$$

$$J(q) = \rho_+(q) - \rho_-(q) \quad (108)$$

を導入した。これが、 $Q^2 + P^2$  に対応していることは、

$$[N(q), J(-q')] = \delta_{q,q'} Lq/\pi \quad (109)$$

からわかる。eq.(106) で  $N, J$  の項を展開して、 $\rho$  の項と比較すると次の関係を得る。

$$\pi v_s \left( \frac{1}{K} + K \right) = 2\pi v_F^*, \quad \pi v_s \left( \frac{1}{K} - K \right) = g_2 \quad (110)$$

これを解いて、 $v_s$  と  $K$  を  $v_F^*$  と  $g_2$  であらわせる。 $v_s$  は先に定義したものと同じになる。また

$$K^2 = \frac{2\pi v_F^* - g_2}{2\pi v_F^* + g_2} = \frac{1 + \tanh 2\phi}{1 - \tanh 2\phi} = \exp(4\phi) \quad (111)$$

が得られる。この量は密度揺らぎの低振動、長波長極限を支配する重要なパラメータである。例えば、

$$\langle N(x)N(0) \rangle \sim Ax^{-2} + B \cos(2k_F x) x^{-2K} + \dots \quad (112)$$

となる。この証明は、今までの扱いに沿うやり方では、 $U$  を  $\hat{\rho}$  で表して、固有状態の空間発展を追跡すると得られる。別解として、位相ボソンを導入することがよく行われるが、紙数の都合により参考文献を挙げるにとどめる [39, 42]。

## 5.2 スピンと電荷の分離

以上の知見をもとに、今度はスピンがある場合を考える。運動エネルギーは

$$\begin{aligned} H_0 &= v_F \sum_{k,s} \left( (k - k_F) a_{+,k,s}^\dagger a_{+,k,s} + (-k - k_F) a_{-,k,s}^\dagger a_{-,k,s} \right) \\ &\rightarrow \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{q>0, \alpha=\pm, s} : \rho_{\alpha,s}(q) \rho_{\alpha,s}(-q) : \end{aligned} \quad (113)$$

となる。ここで密度演算子はスピンのインデックス  $s$  を持ち、

$$\rho_{\pm,s}(q) = \sum_k a_{\pm,k+q,s}^\dagger a_{\pm,k,s} \quad (114)$$

と定義される。ここで、スピンを次のように組み合わせた量を導入する。

$$\rho_\alpha(q) = [\rho_{\alpha\uparrow}(q) + \rho_{\alpha\downarrow}(q)]/\sqrt{2}, \quad \sigma_\alpha(q) = [\rho_{\alpha\uparrow}(q) - \rho_{\alpha\downarrow}(q)]/\sqrt{2} \quad (115)$$

すると、運動エネルギーは

$$H_{0b} = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{q>0, \alpha=\pm} [\rho_\alpha(q)\rho_\alpha(-q) + \sigma_\alpha(q)\sigma_\alpha(-q)] \quad (116)$$

となり、電荷密度  $\rho$  とスピン密度  $\sigma$  が分離した形になる。そこで、相互作用ハミルトニアンとして  $\rho, \sigma$  に関して対角的なものを考えれば、それぞれに対して、スピンがない場合と同様のボゴリユーボフ変換ができる。その際、 $g_2, g_4$  に相当する相互作用定数が、電荷とスピンで同一でなければ、それぞれの励起の速度は異なる。たとえば、 $K_\nu$  ( $\nu = \rho, \sigma$ ) は、

$$K_\nu = \sqrt{\frac{2\pi v_F + g_{4\nu} - g_{2\nu}}{2\pi v_F + g_{4\nu} + g_{2\nu}}} = \exp(2\phi_\nu) \quad (117)$$

となる。伝播速度が異なると、スピンと電荷はあたかも分離して運動するようになる。

### 5.3 $1/r^2$ 相互作用モデル

#### 5.3.1 Sutherland モデル

スケール普遍性がミクロのレベルで実現するためには、運動エネルギーが  $L^{-2}$  のようにスケールすることに対応して、相互作用が  $1/r^2$  のようになっていけばよい。そこでフェルミ粒子系に対して次のようなモデルを考える [43]。

$$\mathcal{H} = - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\pi^2}{L^2} \sum_{i<j} \frac{\lambda(\lambda - P_{ij})}{\sin^2[\pi(x_i - x_j)/L]}, \quad (118)$$

ここで  $P_{ij}$  は、スピンを入れ替える演算子である。結合定数  $\lambda$  は奇数を取るものとする。まず、スピンがない場合を考える。系は半径  $R = L/(2\pi)$  のリングであるとして、 $z_i = R \exp(2\pi i x_i/L)$  と変数を定義する。固有状態の波動関数  $\Psi(z_1, \dots, z_N)$  は以下のようにかける。

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^\lambda \prod_i z_i^{(J+\alpha)} \quad (119)$$

これは、驚くべき単純な結果であるが、直接代入することによって確かめることができる。特に  $\lambda = 1$  は自由フェルミ粒子に対応するもので、波動関数は平面波のスレーター行列式  $\Psi_F$  になっている。これを見るには Vandermonde 行列式の性質を用いる。 $J$  は全系の運動量を粒子数で割ったものに相当する。基底状態では波動関数は実になることから  $\alpha = -\lambda(N-1)$ 、 $J = 0$  が基底状態を与える。

この系の励起状態とそのエネルギーはすべて求めることができる。その結果いくつかの特徴的な結果がわかっている。

1. 密度相関関数は eq.(112) において、指数  $2K$  を  $2/\lambda$  で置き換えた形で与えられる。これは  $K = 1/\lambda$  となることを意味する。
2. 全体の励起スペクトルとその縮退度は、分数統計に従う自由粒子の描像で解釈することができる。この解釈は厳密である [43]。
3. スケール普遍性は低励起極限に限らない。これは、相対論的不変性を前提にする、共形対称性とは別の大きな対称性の存在を示唆する。

### 5.3.2 スピン鎖と超対称 $t$ - $J$ モデル

さて, Sutherland モデルで内部自由度がある場合に, その結合定数  $\lambda$  を無限大にした極限を考える。このとき, 粒子は等間隔に結晶化するので, 注目すべき運動は, 重心の併進運動を別にすれば, 平衡位置からの微小振動 (フォノン) と, 内部自由度の交換になる。後者を記述するハミルトニアンは

$$H = \sum_{i < j} J_{ij} P_{ij}, \quad t_{ij} = 2J_{ij} = J \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin^{-2} \left[ \frac{\pi}{L} (x_i - x_j) \right] \quad (120)$$

となる。ここで  $J$  は適当にエネルギーをスケールして有限にしたもので, 熱力学極限では最隣接の相互作用に相当する。内部自由度が  $SU(2)$  に対応する場合には,

$$P_{ij} = 2\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + 1/2$$

となるので, Heisenberg モデルの長距離相互作用版を与える。これは Haldane-Shastry (HS) モデルと呼ばれる [43]。 $1/r^2$  モデルのスケール普遍性を反映して, HS モデルのスペクトルは通常の Heisenberg モデルよりも単純である。また, 低励起極限に限らずに自由粒子の描像による熱力学と動力学的解釈ができる。この粒子は分数統計に従い, スピノンと呼ばれる。

一方, 内部自由度として,  $SU(2)$  スピンに加えてホールがある場合を考える。例えば, 上向き電子が  $i$  サイトから  $j$  サイトに跳ぶ過程を,  $i$  サイトで  $b^\dagger f_\uparrow$  のように, フェルミオンがボソンに変わり,  $j$  サイトでは逆に  $f_\uparrow^\dagger b$  のように変換するという見方である。これは,  $t$ - $J$  モデルに, 3 章で説明したスレーブ粒子を導入したことに相当する。 $P_{ij}$  として, フェルミオンの交換に伴う符号の変化を考慮すると,

$$H = \sum_{i < j} J_{ij} \tilde{P}_{ij}, \quad (121)$$

を得る。ここで,  $\tilde{P}_{ij}$  はホッピングに対しては負の符号をつける。スピンの交換とホッピングが同じ大きさ  $J$  を持っていることに付随する対称性を, 超対称性と呼ぶ。

超対称  $t$ - $J$  モデルは最隣接相互作用の場合には, ベーテ仮説の方法で厳密に説かれている [39]。 $1/r^2$  形  $t$ - $J$  モデルは HS モデルを拡張したものであり, やはり最隣接モデルよりも単純な性質を持っている [43]。これが Yangian 対称性と呼ばれる高い対称性に由来することがわかってきた。HS モデルや  $1/r^2$  形  $t$ - $J$  モデルの理論的研究は, いまや動力学的厳密に導出する段階に至っている [44]。この結果は, 分数統計に従う自由な素励起描像によって解釈できる。すなわち, 電荷励起を担うホロンと, アンチホロン及びスピノンを担うスピノンがそれである。これらは非常に興味深いトピックであるが, 解説にはさまざまな準備が必要なので, 本原稿では参考文献を挙げるにとどめる [43, 44, 45]。

## 5.4 非フェルミ液体と共形場理論

スピンと電荷の分離を, 近藤モデルにおける非フェルミ状態と比較してみよう。第 3 章の式 (19) において, 伝導電子の波数ベクトル  $k$  を不純物位置を原点として球面波に部分波展開すると, 磁性不純物と相互作用するのは,  $s$  波の角運動量成分だけである。従って,  $s$  波の動径成分  $k$  だけを残すように相互作用を書き直せる。実際の不純物位置は球対称ではなく点群の対称性を持つが, 球面波を点群の調和関数に置き換えれば同様の議論ができる。このことから, 金属中の不純物問題は, 1次元のモデルに移して考えることが可能である。伝導電子の不純物からの距離は, 原点からの正の 1次元座標とみなせる。即ち, 不純物は系の左端に位置し, 右端の座標を  $L/2$  としておく。これは, 3次元の不純物系を半径  $L/2$  の球とすることに対応する。 $s$  波の状態には, 外向きと内向きの球面波があるので, これを 1次元電子の右向きと左向きの波に対応させる。あるいは, 左向きの波  $\exp(-ikx)$  で  $k$  と  $x$  とともに正のものを, 波数  $k$ , 座標  $-x$  を持つ

右向きの波と解釈し直すことができる。後者の解釈では，不純物の左側にも伝導電子が来られるが，その進行方向は右向きだけになる。この速度をフェルミ準位のもの  $v_F$  で代表させる。すると  $s$  波伝導電子のハミルトニアンは

$$H_c = v_F \sum_{k\sigma} k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}, \quad (122)$$

と書ける。ここでフェルミ波数  $k_F$  を 1 次元波数の原点に取り直して， $k$  は  $[-k_F, k_F]$  の範囲で動くと考えている。

不純物のある系のスペクトルを出す上で基本になるのは，純粋な伝導電子系で内部自由度がどのような役割を果たしているかの分析である [46, 47]。  $H_c$  のスペクトルは境界条件に依存する。例えば周期的境界条件 (PBC) と反周期的境界条件 (A-PBC) のもとでは波数の満たすべき条件はそれぞれ

$$k = \frac{2\pi}{L} \times \begin{cases} n & (\text{PBC}) \\ (n + \frac{1}{2}) & (\text{A-PBC}) \end{cases} \quad (123)$$

となる。ここで  $n$  は整数である。さて，電子数の基底状態からの変化を表わす量子数として  $Q$  を導入する。スピンのない電子系では，これに対応する基底状態エネルギーの変化  $\Delta E$  は PBC のもとでは次のように与えられる：

$$\Delta E = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{n=0}^{Q-1} n = \frac{\pi v_F}{L} Q(Q-1). \quad (124)$$

A-PBC では上式の  $Q(Q-1)$  を  $Q^2$  で置き換えればよい。実際には電子はスピンを持っているので，軌道縮退のない場合には  $Q = Q_\uparrow + Q_\downarrow$  とおいて恒等式

$$Q_\uparrow^2 + Q_\downarrow^2 = \frac{1}{2}Q^2 + 2S_z^2, \quad (125)$$

を用いる。ここで  $2S_z = Q_\uparrow - Q_\downarrow$  である。A-PBC でのエネルギー変化は

$$\Delta E = \frac{2\pi v_F}{L} \left[ \frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{3}S^2 \right] \quad (126)$$

と与えられる。ここで系の等方性から  $S_z^2 = S^2/3$  と置いた。一方 PBC では

$$\Delta E = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{\sigma} \sum_{n=0}^{Q_{\sigma}-1} n = \frac{2\pi v_F}{L} \left[ \frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}S^2 \right] \quad (127)$$

となる。上式で  $Q \rightarrow (Q-1)$  とすると，A-PBC での結果と定数項を除いて対応させることができる。これは縮退した PBC の基底状態のうち，フェルミ準位と一致する準位に電子 1 個が存在するものを選ぶことに対応する。従って，境界条件は量子数の特定の組み合わせを要求する。即ち

$$(Q, S) = (\text{偶数}, \text{整数}) \oplus (\text{奇数}, \text{半整数}) \leftarrow (\text{A-PBC}) \quad (128)$$

$$(Q, S) = (\text{偶数}, \text{半整数}) \oplus (\text{奇数}, \text{整数}) \leftarrow (\text{PBC}) \quad (129)$$

となる。

近藤モデルに対する数値的繰り込み群の結果によると [16]，繰り込みステップの偶奇性に依じて，系のスペクトルは PBC あるいは A-PBC を課した伝導電子だけのスペクトルと同じになる。このような驚くべき単純な結果は，繰り込みの固定点が  $J = \infty$  になることに対応している [46]。即ち，右向き電子は，不純物位置を通り抜けるときに位相のずれ  $\pm\pi$  を受ける。系の右端に到達した電子を見ると，元々の PBC から A-PBC への変化，あるいはその逆に相当する変化をしている。これは  $(Q, S)$  の組み合わせで  $Q \rightarrow Q \pm 1$  の変化に対応する。言い換えると，伝導電子のスピンのうち  $1/2$  だけが不純物に飲み込まれたことになる。

さて、非フェルミ液体をもたらず軌道（バンド）縮退のある場合を考える。伝導電子系のハミルトニアンは  $s$  波部分については次のように与えられる:

$$H_c = v_F \sum_k \sum_{m\sigma} k c_{km\sigma}^\dagger c_{km\sigma}. \quad (130)$$

ここで  $m$  はバンドの指数であり、式 (77) でのチャンネルに相当する。少し計算をすると、基底状態エネルギーの変化分として、

$$\Delta E = \frac{2\pi v_F}{L} \left[ \frac{1}{4n} Q^2 + \frac{1}{2+n} l(l+1) + \frac{1}{2+n} S(S+1) + n_Q + n_l + n_S \right] \quad (131)$$

が得られる。ここで、 $l$  は軌道自由度励起の量子数を表わし、 $l(l+1)$  は  $SU(n)$  対称性の生成子からなる 2 次のカシミア演算子の固有値である。例えば  $n=2$  では、 $l$  は基底状態から測った軌道角運動量の増分に対応する。また  $n_Q, n_l, n_S$  は基底状態からの粒子空孔励起を記述する。共形場理論の言葉では、 $Q, l, S$  にある値を与えた後の  $n_Q, n_l, n_S$  の種々の値に対応するスペクトルは、粒子空孔励起のない状態 (“primary state”) に乗った “conformal tower” と呼ばれる [39]

A-PBC での基底状態は、量子数  $(Q, l, S) = (0, 0, 0)$  に対応する。一方 PBC では基底状態は 16 重に縮退している。この縮退度  $2^4$  は、エネルギー 0 にあるそれぞれの内部自由度の準位を占有するか否かの可能性に対応する。例えば一つの基底状態は  $(Q, l, S) = (0, 1, 0)$  を持つ。表 1 は 2 個のチャンネルを持つ自由電子のスペクトルを各境界条件についてまとめたものである。

複数チャンネル近藤モデルでは、固定点は有限の交換相互作用  $J_c$  を持つ。したがって、そのスペクトルを自由電子系のそれから境界条件を変えただけで再現することはできない。実際、数値的繰込み群の結果は、より複雑な構造を示している [47]。しかし、式 (131) での量子数の組み合わせを変えると、驚くべきことに数値計算で得られたスペクトルを再現することができる。例えば、数値的繰込み群の与える基底状態は量子数  $(Q, l, S) = (0, 0, 1/2)$  に対応する。このような組み合わせは、明らかに自由電子では禁止されている。物理的には、量子数  $S=1/2$  は不純物スピンの過剰遮蔽に対応する。表 1 (c) には、数値的繰込み群の結果を再現するように、量子数を組み替えた 2 チャンネル近藤モデルの結果を併せて示す。なお、不純物のポテンシャル散乱が強いと、表 1(c) でスピン  $S$  とチャンネル  $l$  を入れ替えたエネルギー準位が実現する [48]。これは、遮蔽する伝導電子が 1 個しか来られないために、スピンの過剰遮蔽が生じないためである。このような結果は、境界のある場合の共形場理論の枠組みでエレガントに解釈することができる。より詳しくは総合報告 [46, 47] を参照されたい。共形場理論によると、基底状態の縮退の一部だけが不純物の存在に帰せられる。例えば 2 チャンネルモデルの基底状態での残留エントロピーは  $\ln 2$  ではなく、その半分の  $2^{-1} \ln 2$  となる。これは、ベータ仮説による厳密解の結果 [49] と調和する。

不純物系の非フェルミ液体状態では、 $(Q, l, S)$  に関連するモードがすべて同一の速度  $v_F$  を持っている。これはスピンと電荷の速度が異なる 1 次元の  $t$ - $J$  モデルなどとは対照的である。不純物系では、相互作用が一点でしか働かないので、バルクの性質である  $v_F$  を変えることはできないのである。

## 6 強磁場下 2 次元系の電子状態

### 6.1 強磁場下電子系のモデル

GaAs と  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$  を接合して、ヘテロ構造を作ることが広く行われている。バンドギャップの違いから、GaAs 界面に電子がたまり、2 次元電子系が得られる。分数量子ホール効果は、多数の 2 次元電子の間の相互作用効果に起因する。この章では、分数量子ホール状態がどのようなものであるかについて、少数電子系の側から考察する。このような系は、面内のポテンシャルの調節によって実現され、量子ドットとして活発に研究されている [50]。

(a) A-PBC

$Q$	$S$	$l$	$\Delta E/(2\pi v_F/L)$	縮退度
0	0	0	0	1
0	1	1	1	9
$\pm 1$	1/2	1/2	1/2	4
2	0	1	1	3
2	1	0	1	3

(b) PBC

$Q$	$S$	$l$	$\Delta E/(2\pi v_F/L)$	縮退度
0	1	0	0	3
0	0	1	0	3
$\pm 1$	1/2	1/2	0	8
$\pm 2$	0	0	0	2
2	1	1	1	9

(c) 2チャンネル近藤モデル

$Q$	$S$	$l$	$\Delta E/(2\pi v_F/L)$	縮退度
0	1/2	0	0	2
0	1/2	1	1/2	6
$\pm 1$	0	1/2	1/8	2
$\pm 1$	1	1/2	5/8	6
2	1/2	0	1/2	2
2	1	1	1	6

表 1: 右向き電子のスペクトルを反周期的境界条件 (a), 及び周期的境界条件 (b) について示したものの。(b) では  $Q = 0$  を 2 個の電子がエネルギー 0 の準位にある状態にとっている。(c) は 2 チャンネル近藤モデルのスペクトルを示す。

強磁場下の量子ドット系のハミルトニアン  $H = H_0 + V_1 + V_2$  のうち、2次元ポテンシャル  $V_1$  に軸対称性があり、ゆっくりと変化するものと仮定する。中心付近ではテイラー展開の初めの項だけとる近似 (調和近似) が許されるので、 $V_1$ 、及びクーロン相互作用  $V_2$  は次で与えられる。

$$V_1 = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \sum_{i=1}^N |z_i|^2, \quad V_2 = \frac{e^2}{\epsilon_0} \sum_{i<j}^N \frac{1}{|z_i - z_j|}, \quad (132)$$

ここで  $\epsilon_0$  は誘電率 ( $\sim 13$ ),  $\omega_0$  は調和振動子の量子であり、 $z = x + iy$  のように、複素座標を用いた。一方  $H_0 = \sum_{i=1}^N H_0^{(i)}$  において、 $i$  番目の電子の寄与  $H_0^{(i)}$  は

$$H_0^{(i)} = \frac{1}{2m^*} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_i + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_i) \right]^2 + g^* \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{s}_i, \quad (133)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{s}_i$  はスピン演算子、 $\mathbf{A}_\perp$  は  $B_z = (\text{rot} \mathbf{A}_\perp)_z$  により、面に垂直な磁場成分を与える。磁場が面に垂直な場合の GaAs 系量子ドットでは、ゼーマン分裂の大きさは、軌道分裂  $\hbar\omega_c$  に比べて約 5% しかない。これは電子の有効質量  $m^*$  と真空中での値  $m_0$  の比が  $m^*/m_0 = 0.06$  なのに、GaAs での有効  $g$  因子が  $g^* = 0.68$  と小さいためである。 $B_z$  を一定に保ち、面に平行な磁場を増やすと、系の 2 次元性から、サイクロトロン・エネルギーは変化しない。しかし、ゼーマン分裂に寄与する全体の大きさ  $|B|$  は大きくなる。従って、量子ドットにける磁場の方向を傾けると、ゼーマン分裂を相対的に大きくすることができる。

さて、磁場と調和ポテンシャルの共存系の 1 体問題は厳密に解くことができる。スピンを無視した固有値は、 $\omega_T = (\omega_c + \omega_0)^2$ ,  $\omega_D = \omega_T - \omega_c$  を用いて、

$$\epsilon_{nm} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_T + m \omega_D, \quad (134)$$

で与えられる。ここで  $n$  は磁場が強くなるにつれて、調和振動子の量子数からランダウ準位のそれに変化する。 $m$  ( $\geq -n$ ) は角運動量である。例えば、10T の磁場では、 $\hbar\omega_c \sim 20\text{meV}$  となり、典型的な値  $\hbar\omega_0 \sim 5\text{meV}$  に比べてかなり大きい。磁場が十分に強くなると、最低ランダウ準位  $n = 0$  のみを考えればよく、電子の自由度は量子数  $m$  で記述される。以下の議論はもっぱらこの単純な場合について行う。1 電子の波動関数は

$$\phi_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right), \quad (135)$$

で与えられる。ここで長さの単位を

$$\lambda = (c\hbar/eH)^{1/2} (\omega_c/\omega_T) \equiv \ell (\omega_c/\omega_T)$$

に取った。強磁場極限では、 $\lambda = \ell$  とみなしてよい。

## 6.2 複合フェルミオン描像とウィグナー結晶

後に魔法数の解釈に用いるために、複合フェルミオン描像について簡単に説明しよう。より詳しい日本語の解説もある [51, 53]。  $N$  個の電子に対するラフリンの波動関数

$$\Psi_{Lp}(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p+1} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^N |z_k|^2\right). \quad (136)$$

は、熱力学的極限  $N \rightarrow \infty$  で、基底ランダウ準位の充填率が  $\nu = 1/(2p+1)$  である分数量子ホール状態を表わす [51]。この波動関数から因子  $\Phi_p = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p}$  を分離すると、残りの部分  $\Psi_{L0} \equiv \Psi_{F1}$  は電子

を角運動量の小さい方から順番につめた状態のスレーター行列式に対応する。 $\Phi_p$  は、電子対を交換する際の位相の変化を  $\Psi_{F1}$  よりも  $2p\pi$  だけ増加させる。複合フェルミオン描像では、この位相変化を「各電子に磁束が貼りついた」と解釈する。実は、磁束そのものの効果は、位相因子  $\Phi_p/|\Phi_p|$  で表わせるはずであり、これは特異ゲージ変換と呼ばれるユニタリ変換である。今のように  $\Phi_p$  をかける変換は振幅の変化も含んでいるのでユニタリではないことに注意する。

クーロン相互作用のある系では、 $\Psi_{F1}$  ではなく、ラフリン波動関数が良い近似で固有関数になることは、興味深い。複合フェルミオン描像では、クーロン相互作用の本質的な効果は電子に磁束が貼りついたことを表わす  $\Phi_p$  の掛け算で吸収できると仮定する。 $p, q$  を自然数として、 $\nu = q/(2pq + 1)$  で表される分数量子ホール状態に対する波動関数は、この描像に立つと

$$\Psi_{Lpq}(z_1, \dots, z_N) = \Phi_p \mathcal{P} \Psi_{Fq}(z_1, \dots, z_N) \quad (137)$$

と表わさせる。ここで  $\Psi_{Fq}$  は熱力学的極限で下から  $q$  個のランダウ準位が詰まっている場合の自由電子の波動関数、 $\mathcal{P}$  は、 $\Psi_{Fq}$  の多項式部分に現れる  $z_i^*$  を  $\partial/\partial z_i$  に置き換える演算子であり、 $\Psi_{Fq}$  を基底ランダウ準位へ投影することに対応する。

(137) 式は、個数の少ない電子系に対して用いることもできる。この場合、 $\Psi_{Fq}$  は  $q$  個のランダウ準位について、角運動量の小さい方から有限個の電子を順番につめた状態に置き換えられる。その際、下のランダウ準位よりも上の準位に多数の電子が分布することを禁止する。このような状態をコンパクト状態と呼ぼう。 $q$  を決めても、 $q = 1$  以外では複数のコンパクト状態がある。コンパクト状態では分数量子ホール状態と同様に、 $\mathcal{P}$  の効果ですべての電子は結局のところ最低ランダウ準位のみ分布する。 $\Psi_{Fq}$  にあられる励起ランダウ準位は、複合フェルミオンの仮想的準位と解釈される。

さて、今までは電子スピンの完全分極を仮定していたが、分極が不完全であっても複合フェルミオン描像が成立する。この場合の波動関数は、式 (137) において  $\Psi_{Fq}$  を各スピンに対する自由電子のスレーター行列式の積に置き換えることによって得られる。一方、電子密度が非常に小さくなると、クーロン反発力を避けるために電子は結晶化する。 $p \sim 70$  以上のラフリン波動関数  $\Psi_{Lp}$  が結晶状態に対応することは、モンテカルロ計算によって示されている [54]。しかし、このように低密度の領域では、ラフリンの波動関数がよい試行関数ではなくなる。別の表現をすれば、複合フェルミオン描像では取り込めない相互作用効果が、低密度では重要になる。逆にウィグナー結晶状態から零点振動を入れるという方向でも、特定充填率での安定化が議論されている [55]。

### 6.3 量子ドット系における角運動量の魔法数

強磁場極限での 2 電子問題は、相対座標を用いることによってすぐに解ける。波動関数が反対称になる条件から、スピン 3 重項の相対角運動量は奇数、単重項の相対角運動量は偶数になる。ラフリンは強磁場極限でスピンのそろった 3 体問題を厳密に解いた [54]。基底状態エネルギーを全角運動量の関数としてプロットすると、3 を周期にエネルギーの低い安定な状態が現れることがわかった。安定な状態に対応する角運動量を魔法数と呼ぶことにする。その後、電子数  $N = 4, 5$  の系について数値計算が行われ [56, 57, 58]、全角運動量の  $N$  を周期とする特定の値で、エネルギーが特に低くなることがわかった。

$N = 6$  [59, 60] 及び  $7$  [61] の完全スピン分極系について、数値的厳密対角化の手法により基底状態の諸性質が計算されている。強磁場極限では、系のエネルギー  $E(N, M)$  は調和ポテンシャルのない場合のエネルギー  $E_0(N, M)$  を用いて

$$E(N, M) = E_0(N, M) + \gamma(M + N), \quad (138)$$

と書けるから、異なる調和ポテンシャルに対して何回も計算をする必要はない。ここで  $\gamma$  は調和ポテンシャル

ルの強さを表わし、エネルギーの単位として  $e^2/\epsilon_0\ell$  を用いると、

$$\gamma = \frac{m^* \omega_0^2 \ell^2}{2e^2/(\epsilon_0\ell)}, \quad (139)$$

となる。

$N = 6$  の結果を見ると基底状態エネルギーは多数の下向きのカスプを持つ [61, 52]。  $N = 6$  でのカスプの位置  $M = 15, 21, 27, 33, 39, 45$  は、次の公式で  $N = 6$  と置いた場合に相当する。

$$M = N(N - 1)/2 + Nk \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (140)$$

この系列を  $S_N$  と呼ぶことにする。別の系列のカスプ  $M = 30, 35, 40, 45, 50$  は上の式で  $Nk \rightarrow (N - 1)k$  と置いて得られる。ただし、この式では  $M = 20$  も入るはずであるが、実際の計算結果ではカスプになっていない。これについては、後に触れる。後者の系列を  $\tilde{S}_N$  と呼ぶことにする。これらのカスプに対応する角運動量の値が魔法数に相当する。5 個以下の電子系では、系列  $S_N$  だけが現れ、6 個以上の電子を含む系でのみ  $\tilde{S}_N$  も現れる。同様な計算を  $N = 7$  の系で行うと、 $\tilde{S}_N$  は  $S_N$  よりもはるかに目立つことが見出された [61]。

$S_N$  と  $\tilde{S}_N$  の由来を理解するために、角運動量の分布関数  $n_m$  を見よう。角運動量  $m$  の基底ランダウ準位の電子の消滅演算子を  $a_m$  とすると、

$$n_m = \langle \Phi_0 | a_m^\dagger a_m | \Phi_0 \rangle, \quad (141)$$

で与えられる。  $|\Phi_0\rangle$  は基底状態の波動関数である。  $N = 6$  での結果を見ると、  $\tilde{S}_N$  に属する状態の分布関数は、  $m = 0$  と有限の  $m$  に 2 個のピークを持ち、  $S_N$  の分布関数は有限の  $m$  に単独のピークを持つ。これは、電子がドットの中心にしやすいか否かを区別する。

これを更に明確に示すのが、2 体分布関数  $n(z, z')$  である。この定義は

$$n(z, z') = \langle \Phi_0 | \psi^\dagger(z) \psi^\dagger(z') \psi(z') \psi(z) | \Phi_0 \rangle. \quad (142)$$

である。ここで、

$$\psi(z) = \sum_m \phi_m(z) a_m. \quad (143)$$

である。第 10 図に結果の一例を示す。これからわかるように、  $S_6$  は電子が正 6 角形、  $\tilde{S}_6$  は正 5 角形と中心位置に配置していると見ることができる。軸対称性があるために、この配置は 1 体の分布関数では見ることができない。魔法数に対応しない  $M$  の値では、対相関関数  $n(z, z')$  はこのような正多角形のパターンを示さない。この結果から、魔法数に対応する状態は、クーロン反発力をうまく避けていることがわかる。この状態は、ウィグナー結晶のできかかったものとみなすことができる。電子数を増やすと、  $S_N$  に対応する配置よりも、1 個の電子が中に分布する  $\tilde{S}_N$  やさらに多くの電子が内部に分布する配置が安定になることは、容易に想像できる。  $N = 7$  で  $S_N$  が目立たなくなったのは、このような理由によると考えられる。

魔法数の幾何学的解釈を以下に説明しよう。波動関数  $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_N)$  において、正  $N$  角形に対応する配置は  $z_n = R \exp(in\phi)$  と与えられる。ここで  $\phi = 2\pi/N$  である。角運動量演算子を  $\hat{M}$  として  $\exp(i\hat{M}\phi)$  を波動関数にかけると、系全体が  $\phi$  だけ回転することにより、

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{M}\phi) \Phi(z_1, z_2, \dots, z_N) &= \Phi(z_N, z_1, \dots, z_{N-1}) \\ &= (-1)^{N-1} \Phi(z_1, z_2, \dots, z_N), \end{aligned}$$

$\Phi$  が固有値  $M$  を持つ場合

$$[\exp(iM\phi) + (-1)^N] \Phi(z_1, z_2, \dots, z_N) = 0 \quad (144)$$

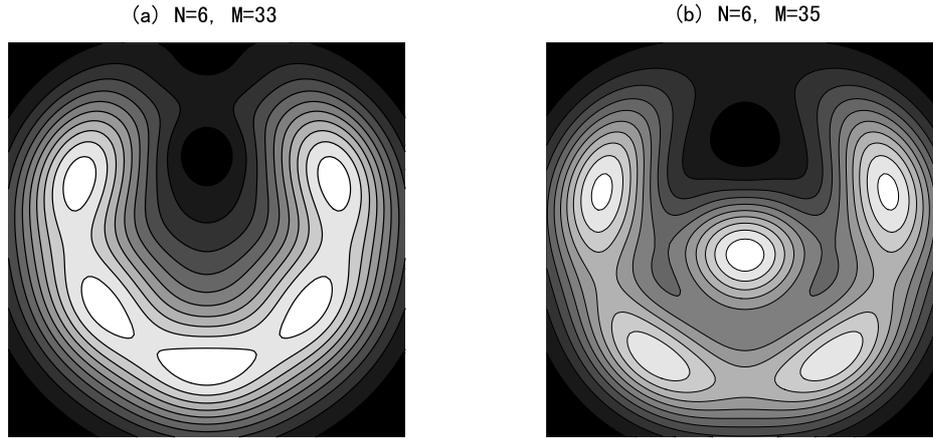


図 10: 6 電子系の対相関関数。明るい部分は電子分布が大きい。(a) は 6 角形の配置, (b) は 5 角形と中心に電子が多く分布している。

が要求され,  $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_N)$  が 0 にならないためには,  $M$  の選択則として次を得る。まず  $N$  が偶数のときは  $j$  を非負整数として  $M = N(j+1/2)$ , 奇数のときは  $M = Nj$  となる。パウリ原理から  $M \geq N(N-1)/2$  となることを考慮すれば  $S_N$  は再現される。

$\tilde{S}_N$  については,  $z_N = 0$ , これ以外の座標は  $\phi' = 2\pi/(N-1)$  として  $z_n = R \exp(in\phi')$  とおき, 同様の議論ができる。これから選択則として  $N$  が偶数の場合  $M = (N-1)j$ ,  $N$  が奇数の場合  $M = (N-1)(j+1/2)$  を得る。これは  $N = 6$  での  $\tilde{S}_N$  を再現する。

一方, 複合フェルミオン描像による魔法数の説明は以下ようになる。(137) 式において, 全角運動量  $M$  は,  $\Phi_p$  による部分  $M_p = pN(N-1)$  と  $\Psi_{Fq}$  による部分  $M_{free}$  の和になる。射影演算子  $\mathcal{P}$  は角運動量に影響しない。以下  $p = 1$ ,  $N = 6$  の場合を考える。 $q = 1$  では,  $M_{free} = N(N-1)/2$  となるので,  $M = 45$  が得られる。これは幾何学的解釈において  $S_N$  と  $\tilde{S}_N$  の両方に属する魔法数である。 $p = 1$  の範囲では,  $q \neq 1$  の状態は  $M = 45$  よりも小さい魔法数を与える。例えば, 1 個の電子が 2 番目のランダウ準位の最低角運動量  $m = -1$  を占め, 残りの 5 個の電子は最低ランダウ準位にとどまる状態を  $\Psi_{51}$  と書く。 $\Psi_{51}$  の角運動量は  $M_{free} = 9$  となるので  $M = 39$  が得られる。最低ランダウ準位以外の準位に電子を 1 個まで分布させることにより,  $\Psi_{411}, \Psi_{3111}$  などと書ける状態が得られ, これらの  $M$  は 6 毎に分布する。従って, 複合フェルミオン描像でも  $S_N$  に属するすべての魔法数が得られる。最小値  $M = 15$  は状態  $\Psi_{111111}$  に対応する。さて, 励起ランダウ準位に分布する電子数を増せば,  $S_N$  以外の魔法数が得られる。この結果  $M = 25, 30, 35$  が新たに得られる。これは  $\tilde{S}_N$  とは  $M = 20$  がない分だけ異なる。複合フェルミオン描像による魔法数分布の特徴は,  $\Psi_{33}$  に対応する値  $M = 30$  の周りに対称になることである。以上の議論において, 複合フェルミオン描像による魔法数の解釈は, コンパクト状態はそうでない状態よりも安定であるという仮定に基づいていることを注意しておく。

## 7 まとめ

この講義ノートでは量子多体系が示す, 興味ある物理をなるべく初等的に説明することを心掛けたが, 著者の力不足と時間不足から, わかりにくいところや中途半端な議論に終わっているところが多い。これらについては, 実際の講義では, より分かりやすい形に直すつもりである。特に分数統計については, その熱力学や動的相関関数, さらに内部自由度の効果についてもっと詳しい説明をしたかったが, 講義ノート

の空間的・時間的制約により果たせなかった。講義では、この点についても改良したい。事前により進んだ勉強をしたい人などのために、なるべくわかりやすい参考文献を掲げておいた。

量子多体系の相互作用効果を理解するために、二つの最も重要な概念があることは初めにも強調した。その一つは繰込みである。繰り込みについては、さまざまなとらえ方があり、著者も以前から理解に苦しんできた。文献では、往々にして説明する方が混乱しているので、よくわかっている読者以外は、わからないのは読むほうの責任と思って苦しむことがある。このテキストで与えた形式は、自分としては一番納得できる考え方なので、幾人かは救われると信じているのであるが...

もう一つの重要な概念は、素励起の描像である。遍歴電子系においては、フェルミ流体理論としては非常に長い歴史を持つ確立した概念である。一方、1次元電子系でフェルミ流体理論が破綻することもよく知られている。1次元では、ボソン化の方法が広く行われているが、素励起についてはあまり言及されていない。この原因は、1次元多体系の完全系を張る基底(素励起に対応)がユニークには決まらないことにある。すなわち、低振動数と長波長の極限では、共形対称性を持つボソンがもっとも便利であるが、スペクトルに分散が出てくると共形不変性は破綻する。スピノンとホロンを導入する際には、ホロンをフェルミ粒子としても完全系を張れるし、セミオンという分数統計粒子とみなしても別の完全系を張れる [43]。したがって、基底の良し悪しは、系の固有状態を記述するのにどれだけ便利かということによって判定される。1次元系のパラメータを変化させると、出現する粒子が変わるという事情は気持ちが悪いので、自由フェルミ気体に対応する標準的な系を持ち、一般の系はその標準系から摂動論で理解できることが望ましい。私の個人的な見解では、1次元系の基本粒子は分数統計に従うスピノンとホロンであり、その事情を端的に表現するのは、 $1/r^2$  型超対称  $t$ - $J$  モデルということになる。ただし、この見解は多分に個人史に依存しているので、他の人の見解も聞いて欲しい。

2次元電子系の素励起については、事態はさらに茫漠としている。銅酸化物超伝導体の異常な性質から、2次元ではフェルミ流体が破綻するという議論がかつてなされたが、忠実な摂動計算をすると、そうではないという結論が出てくる。ただし、フェルミ流体が3次元よりもかなり脆弱で、有限温度ではこの概念があまり役に立たない可能性はある。したがって、2次元でフェルミ流体を包含するような有用な現象論を作ることができれば、大きな理解の進展が図れる。

一方、強磁場下の分数量子ホール系では、複合フェルミオンという描像が非常に有効に働く。本テキストでその一端を示したように、複合フェルミオンの波動関数は、1次元の Sutherland モデルの波動関数と類似している。そこで、分数統計を1次元と2次元で統一的に把握することが可能になる。分数量子ホール系では、ホールが  $1/3$  統計に従うことが有名であるが、動的な相関関数にこのような素励起がどのように影響するかについては、あまり研究がなされていない。1次元の電子系・スピン系では、詳細に励起スペクトルが計られていて、分数統計素励起による解釈が有効なことがわかっているので、分数量子ホール系でも動的応答関数の実験的・理論的研究が待たれる。

## 参考文献

- [1] K.G. Wilson, Phys.Reports **2**, 75 (1974).
- [2] Y. Endoh et al., Phys. Rev. Lett. **32**, 170 (1974).
- [3] M. Arai et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 3649 (1996).
- [4] L. Saminadayar et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).
- [5] R. de-Picciotto et al., Nature **389**, 162 (1997).

- [6] Y. Kuramoto and Y. Kitaoka, *Dynamics of Heavy Electrons*, (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [7] P.W. Anderson, Phys. Rev. **124**, 41 (1961).
- [8] J. Kondo, in *Solid State Physics* Vol.23 (Academic Press, New York, 1969), p.183.
- [9] A.C. Hewson, *The Kondo Problem to Heavy Fermions*,
- [10] B. Coqblin and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **185**, 847 (1969). (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [11] P.W. Anderson, J. Phys. C **3**, 2439 (1970).
- [12] A.A. Abrikosov, Physics **2**, 5 (1965).
- [13] P. Nozieres, J. Low Temp. Phys. **17**, 31 (1975).
- [14] D. Pines and P. Nozieres, *The Theory of Fermi Liquids: Volume I*, (W.A. Benjamin, New York, 1966).
- [15] K. Yamada, Prog. Theor. Phys. **53**, 970 (1975).
- [16] K.G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [17] J.W. Rasul and A.C. Hewson, J. Phys. C **17**, 2555 & 3332 (1984).
- [18] N. Read and D.M. Newns, J. Phys. C **16**, 3273 (1983).
- [19] H. Shiba, Prog. Theor. Phys. **54**, 967 (1975).
- [20] P. Nozieres and A. Blandin, J. Physique **41**, 193 (1980).
- [21] D.L. Cox, Phys. Rev. Lett. **59**, 1240 (1987).
- [22] T. Kasuya, in *Magnetism Vol.IIB* (Eds., G.T. Rado and H. Suhl, Academic Press, New York, 1965)
- [23] K. Yamada, K. Yosida and K. Hanzawa: Prog. Theor. Phys. **71**, 450 (1984).
- [24] J. Luttinger and J. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417 (1960);
- [25] B.H. Brandow, Phys. Rev. B **33**, 215 (1986).
- [26] H. Shiba, J. Phys. Soc. Jpn. **55**, 2765 (1986).
- [27] H. Tsunetsugu, M. Sigrist and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **69**, 3042 (1997).
- [28] M. Imada, A. Fujimori and Y. Tokura: Rev. Mod. Phys. **70**, 1039 (1998).
- [29] J.M. Effantin et al.: J. Magn. & Magn. Mater. **47& 48**, 145 (1985).
- [30] M. Takigawa: J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 728 (1983).
- [31] M. Hiroi, M. Sera, M. Kobayashi and S. Kunii: Phys. Rev. B **55**, 8339 (1997).
- [32] S. Inagaki, Prog. Theor. Phys. **62**, 1441 (1979).

- [33] K.I. Kugel and D.I. Khomski: Sov. Phys. Uspekhi **25** 231 (1982).
- [34] Y. Kuramoto: Springer Series in Solid-State Sciences **62**, 152 (1985).
- [35] 倉本義夫, 酒井治: 固体物理 **29**, 777 (1994).
- [36] A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth and M.J. Rozenberg: Rev. Mod. Phys. **68**, 13 (1996).
- [37] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 349 (1950).
- [38] J.M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [39] 川上則雄, 梁 成吉, “共形場理論と1次元量子系”, (岩波書店, 1997)
- [40] D.C. Mattis and E.H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1963).
- [41] F.D.M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981)
- [42] 永長直人, “電子相関における場の量子論”, (岩波書店, 1998)
- [43] 加藤雄介, 倉本義夫, 固体物理 **31** 117 (1995).
- [44] Y. Yamamoto, Y. Saiga, M. Arikawa and Y. Kuramoto, Phys. Rev. Lett. **84**, 1308 (2000).
- [45] D. Uglov, Commun. Math. Phys. **191**, 663 (1998).
- [46] I. Affleck: Acta Physica Polonica, **26**, 1826 (1995).
- [47] D.L. Cox and A. Zawadowski, Adv. Phys. **47**, 599 (1998).
- [48] H. Kusunose et al. Phys. Rev. Lett. **65**, 3032 (1996).
- [49] A.M. Tsvelick and P.B. Wiegmann, Z. Phys. B **54**, 201 (1984); N. Andrei and C. Destri, Phys. Rev. Lett. **52**, 364 (1984).
- [50] R.C. Ashoori, Phys. Rev. Lett. **71**, 613 (1993).
- [51] 中島龍也, 青木秀夫, 固体物理 **31** 447,529,755 (1996).
- [52] 倉本義夫, 固体物理 **32** 43 (1997).
- [53] 吉岡 大二郎, “量子 Hall 効果”, (岩波書店, 1998).
- [54] *The Quantum Hall Effect*(R.E. Prange and S.M. Girvin eds., Springer-Verlag, Berlin 1987), p.233.
- [55] S. Kivelson et al., Phys. Rev. Lett. **56**, 873 (1986).
- [56] S.M. Girvin and T. Jach, Phys. Rev. B **28**, 4506 (1983).
- [57] S.A. Trugman and S. Kivelson, Phys. Rev. B **31**, 5280 (1985).
- [58] P. A. Maksym, Physica, B **184**, 385 (1993).
- [59] S. R. E. Yang and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **70**, 4110 (1993).
- [60] J. K. Jain and T. Kawamura, Europhys. Lett. **29**, 321 (1995).
- [61] T. Seki, Y. Kuramoto and T. Nishino, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 3945 (1996).