

フーリエ変換の応用

テキスト: p. 24

強制振動の運動方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = \overset{\text{復元力}}{-kx} - \underset{\text{摩擦力}}{\gamma \frac{d}{dt} x} + \overset{\text{外力}}{F(t)}$$

$F(t)$ の複素フーリエ級数展開

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

T : 強制振動の周期

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + kx + \gamma \frac{d}{dt} x = f_n e^{i\omega_n t}$$

$$\Downarrow \quad \longleftarrow x = A_n e^{i\omega_n t}$$

$$(-\omega_n^2 m + i\omega_n \gamma + k) A_n e^{i\omega_n t} = f_n e^{i\omega_n t}$$

一般解は線形同次方程式の解

(この解は減衰して最終的に消える)

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + kx + \gamma \frac{d}{dt} x = 0$$

と非同次方程式の特殊解

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + kx + \gamma \frac{d}{dt} x = F(t)$$

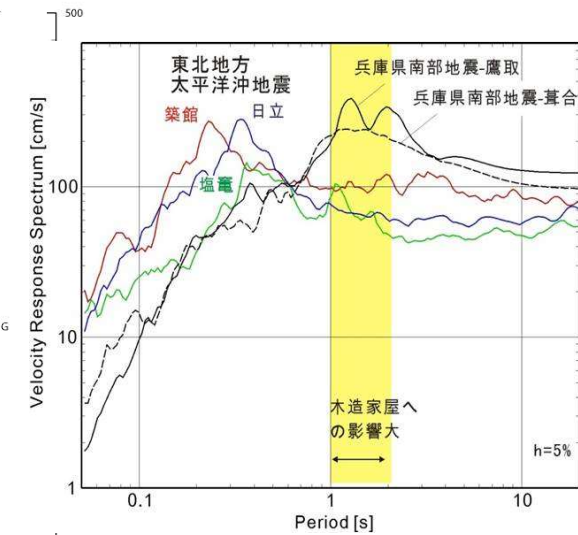
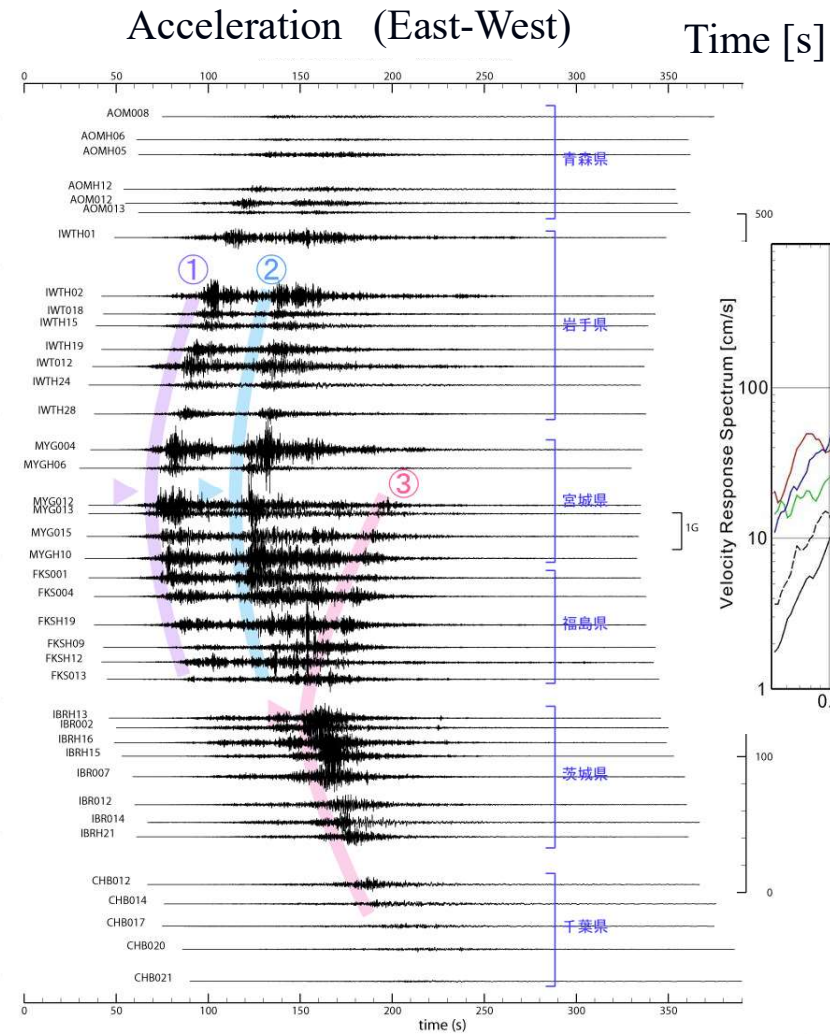
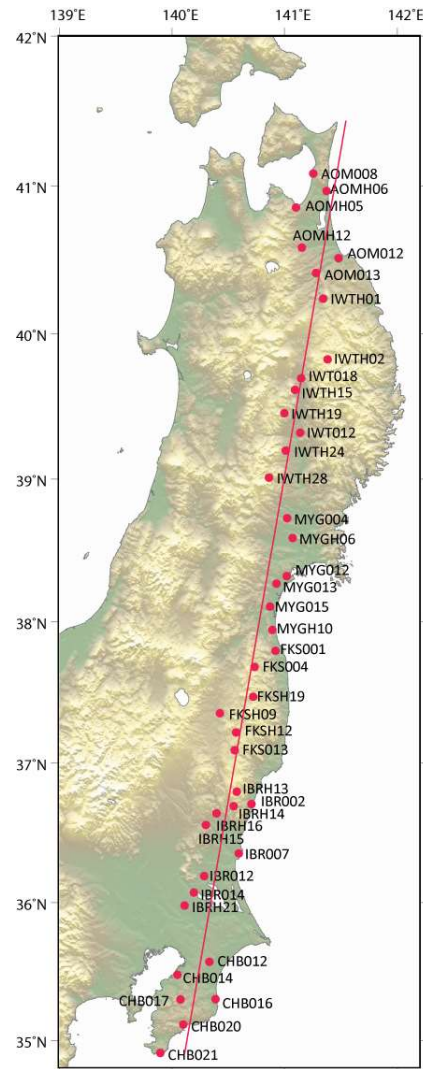
の重ね合わせ

強制振動の解

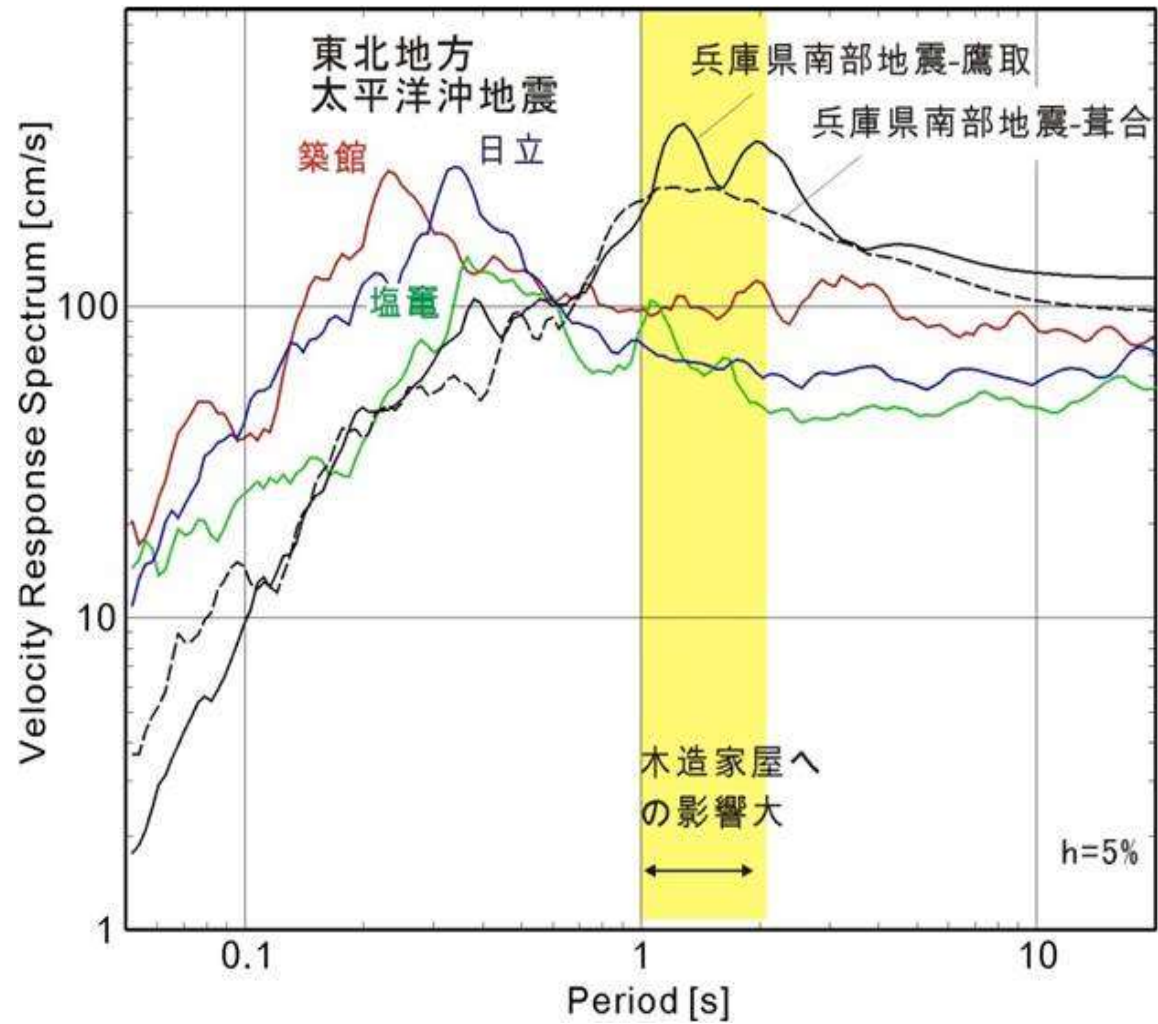
$$A_n = \frac{f_n}{k - \omega_n^2 m + i\omega_n \gamma}$$

$$x(t) = \sum_n A_n e^{i\omega_n t}$$

Earthquake waves



Earthquake waves



熱伝導

テキスト: p. 24

熱伝導方程式 $u(x, t)$ 温度場

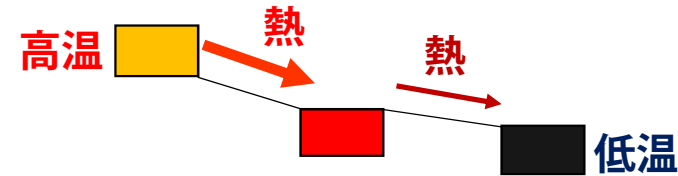
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

変数分離法 $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} \frac{1}{k^2} = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \lambda$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \lambda k^2 \quad T_\lambda(t) = Ce^{\lambda k^2 t} \quad T_\lambda(t) = Ce^{-q^2 k^2 t}$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \lambda \quad X_\lambda(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ X_\lambda(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx}$$



- 熱流は温度勾配から生じる
- 内部エネルギーの変化は熱流の不均衡によって生じる

熱伝導

テキスト: p. 25

温度場

$$X_q(x)T_q(t) = (C_q e^{iqx} + C_{-q} e^{-iqx}) e^{-q^2 k^2 t}$$

初期条件

$t=0$ で

$$u(x, 0) = f(x)$$

異なる q の解の重ね合わせも方程式の解

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_q e^{iqx} e^{-q^2 k^2 t} dq$$
$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_q e^{iqx} dq$$

$$C_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iqx} dx$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-iqx'} dx' \right) e^{iqx} e^{-q^2 k^2 t} dq$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq(x-x')} e^{-q^2 k^2 t} dq dx'$$

熱伝導

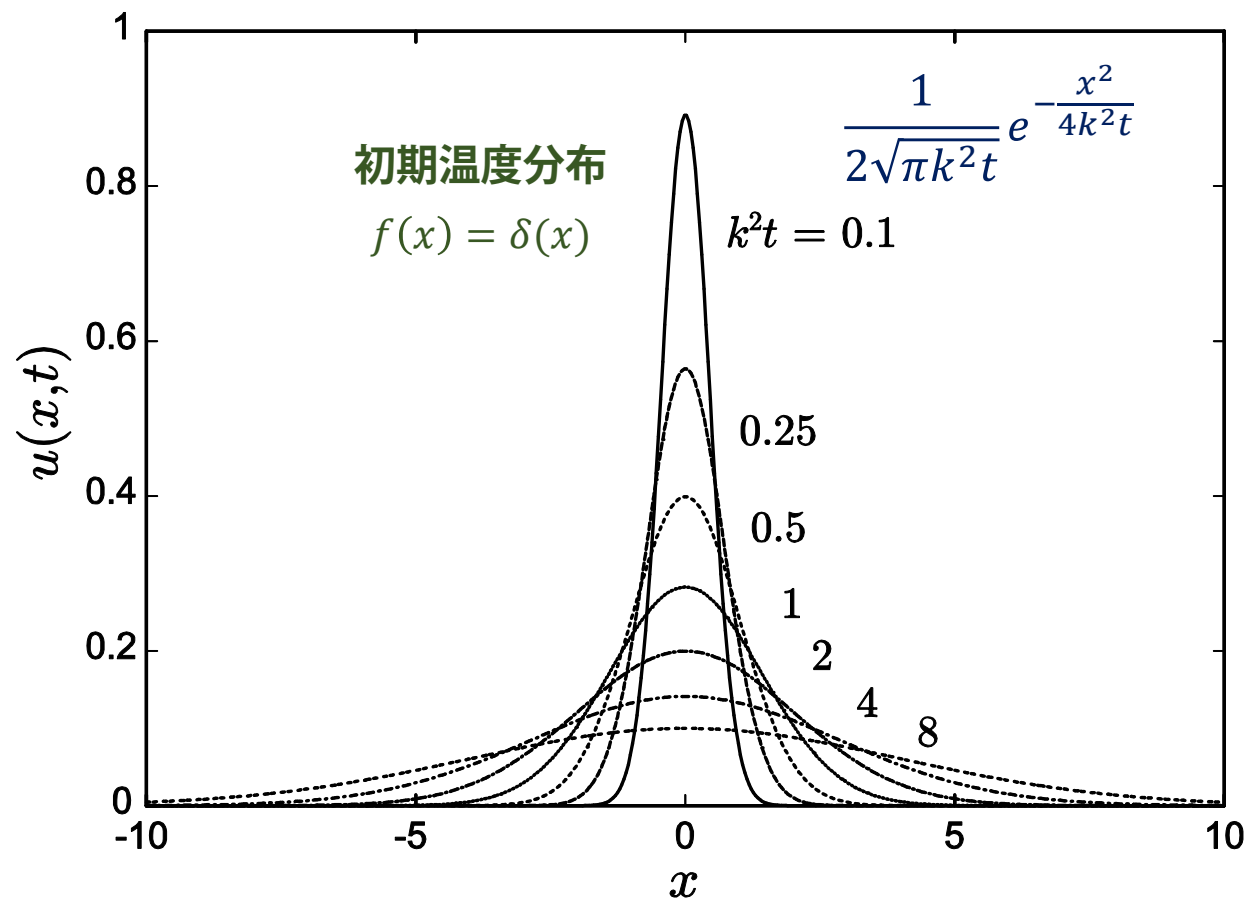
テキスト: p. 26

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iq(x-x')} e^{-q^2 k^2 t} dq &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -k^2 t \left(q - \frac{i(x-x')}{2k^2 t} \right)^2 + k^2 t \left(\frac{i(x-x')}{2k^2 t} \right)^2 \right\} dq \\ &= \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4k^2 t} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -k^2 t \left(q - \frac{i(x-x')}{2k^2 t} \right)^2 \right\} dq \\ &= \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4k^2 t} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{k^2 t}}\end{aligned}$$

温度場の時間変化（熱の拡散）

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq(x-x')} e^{-q^2 k^2 t} dq dx' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4k^2 t} \right\} dx'\end{aligned}$$

熱拡散方程式の解



微分のフーリエ変換

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} e^{-ikx} dx &= [f(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ik)e^{-ikx} dx \\ &= ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= ikF(k)\end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d^n}{(dx)^n} f(x) \right\} e^{-ikx} dx = (ik)^n F(k)$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

畳み込み積分

テキスト: p. 27

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')g(x')dx'$$

$h(x)$ のフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')g(x')e^{-ikx}dx'dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')e^{-ik(x-x')}g(x')e^{-ikx'}dx'dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt g(x')e^{-ikx'}dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x')e^{-ikx'}dx'$$

$t = x - x'$
 $dt = dx$

$$= F(k)G(k)$$

測定装置の特性関数

$$f(x - x') = e^{-a(x-x')^2}$$

測定装置の分解能 $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

