

ガウス関数 e^{-ax^2} のフーリエ変換

テキスト: p. 19

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{e^{-ax^2}} e^{-ikx} dx$$



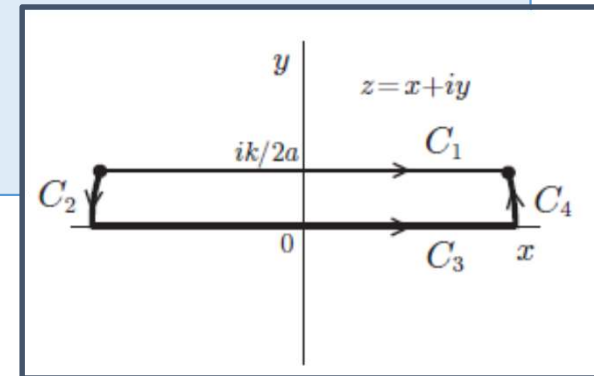
$$-ax^2 - ikx = -a \left(x + \frac{ik}{2a} \right)^2 - \frac{k^2}{4a}$$

$$= e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left(x + \frac{ik}{2a} \right)^2} dx = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left(x + \frac{ik}{2a} \right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta \right\}^{1/2} = \left\{ 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} \right\}^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}}$$



不確定性原理

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

実空間のガウス関数

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$



波数空間のガウス関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx} = \sigma_x^2 = \frac{1}{2a}$$

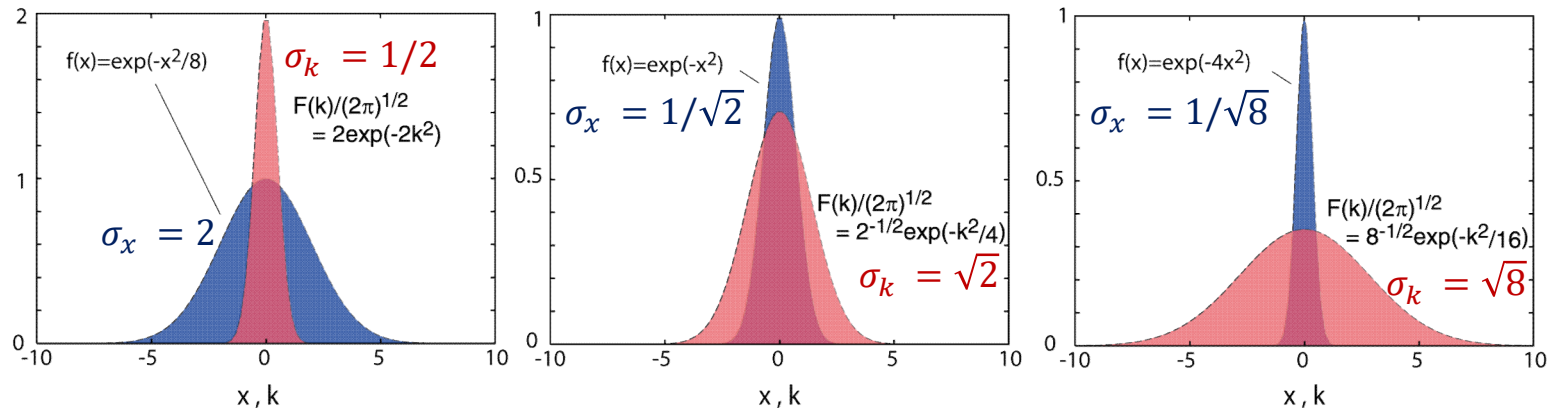
ガウス関数の(標準偏差)²

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-\frac{1}{4a}k^2} dk}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4a}k^2} dk} = \sigma_k^2 = 2a$$

フーリエ変換したガウス関数の(標準偏差)²

$$\sigma_x^2 \cdot \sigma_k^2 = \frac{1}{2a} \cdot 2a = 1 \quad \text{不確定性原理}$$

ガウス関数 e^{-ax^2} のフーリエ変換



$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx} = \sigma_x^2 = \frac{1}{2a}$$

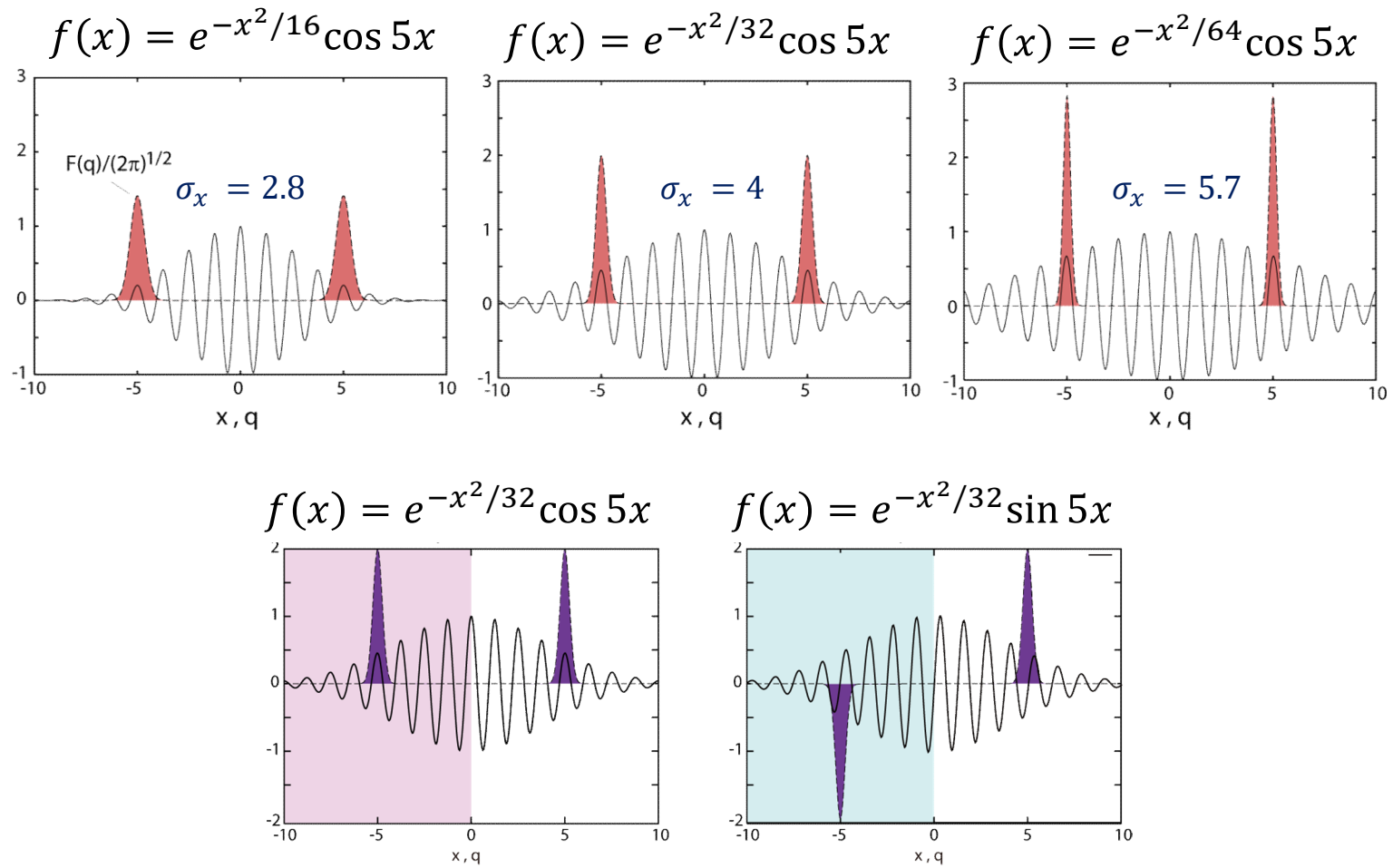
ガウス関数の (標準偏差)²

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-\frac{1}{4a}k^2} dk}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4a}k^2} dk} = \sigma_k^2 = 2a$$

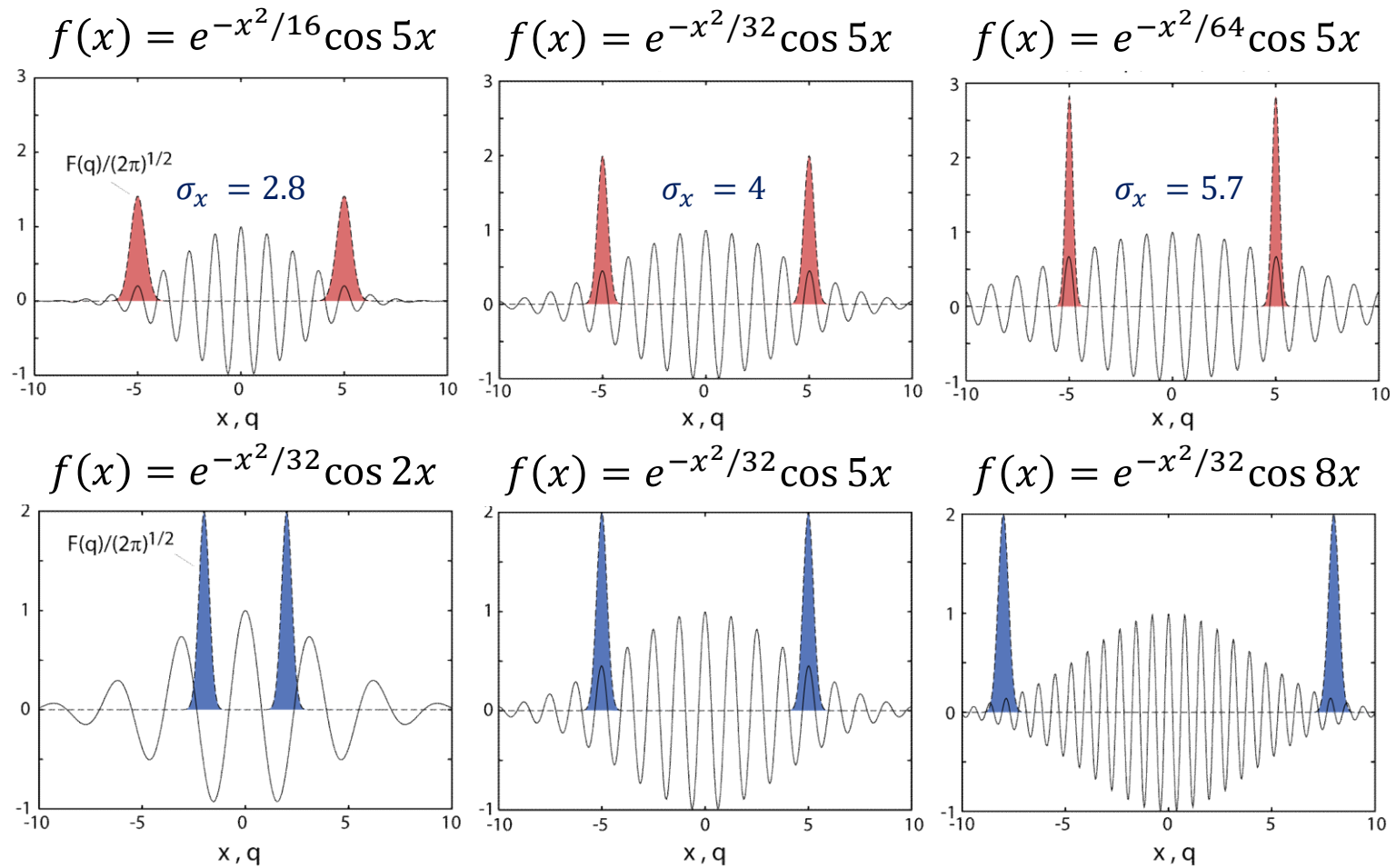
フーリエ変換したガウス関数の (標準偏差)²

$$\sigma_x^2 \cdot \sigma_k^2 = \frac{1}{2a} \cdot 2a = 1 \quad \text{不確定性原理}$$

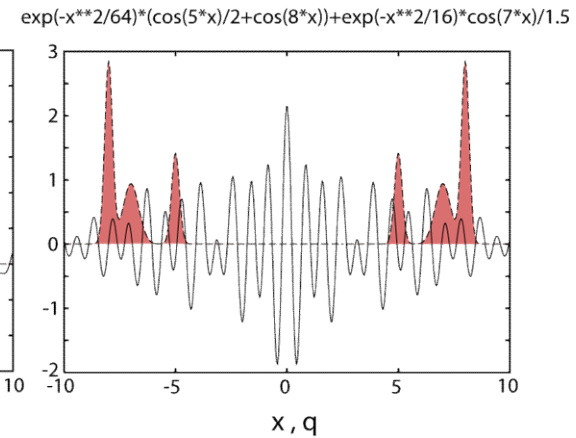
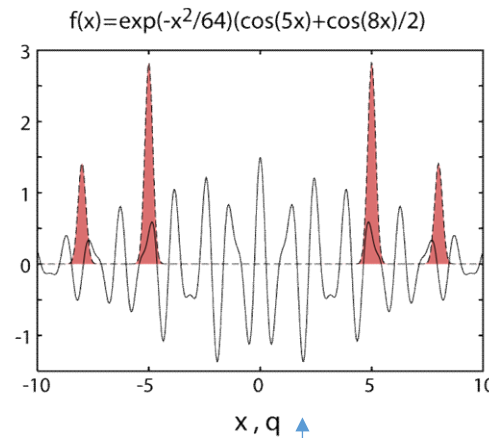
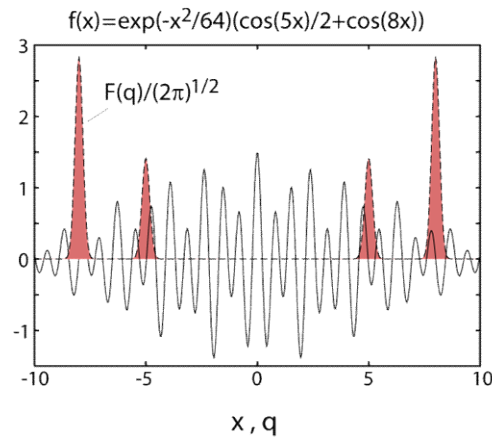
フーリエ変換の性質



フーリエ変換の性質



フーリエ変換の具体例



$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{64}}(\cos 5x + \frac{1}{2} \cos 8x)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{64}}(\frac{1}{2} \cos 5x + \cos 8x)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{64}}(\frac{1}{2} \cos 5x + \cos 8x) + e^{-\frac{x^2}{16}}(\frac{2}{3} \cos 7x)$$

δ 関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) \varphi_n(x') = \frac{1}{L\Delta k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi n}{L}(x-x')} \Delta k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-x')k} dk$$

$$= \delta(x - x') \quad \varphi_n(x) \text{ が完全系であること条件}$$

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & (x \neq x') \\ \infty & (x = x') \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') dx' = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x)$$

フーリエ変換の完全性

テキスト: p. 18

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ik(x-x')} dx' dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk \right) dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{-ik(x-x')} dk = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left[-\frac{e^{-ik(x-x')}}{x-x'} \right]_{k=-N}^{k=N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{iN(x-x')} - e^{-iN(x-x')}}{x-x'} = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin\{N(x-x')\}}{x-x'} = \delta(x-x') \end{aligned}$$

δ 関数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) \varphi_n(x') = \frac{1}{L\Delta k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi n}{L}(x-x')} \Delta k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk$$

$$= \delta(x - x') \quad \varphi_n(x) \text{ が完全系であること条件}$$

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & (x \neq x') \\ \infty & (x = x') \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') dx' = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x)$$

δ 関数の性質

- $\frac{d}{dx} \delta(x - x') = \delta'(x - x')$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta'(x - x') dx' &= [f(x') \delta(x - x')]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x') \delta(x - x') dx' \\ &= -f'(x) \end{aligned}$$

- $\delta\{a(x - x')\}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta\{a(x - x')\} dx' &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta\{|a|(x - x')\} |a| dx' \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{|a|}\right) \delta(t - t') dt' \quad t = |a|x \\ &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{|a|}\right) = \frac{1}{|a|} f(x) \end{aligned}$$

δ関数の表現

完全系の条件

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x')} dk \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin\{N(x-x')\}}{x-x'}$$

階段関数の微分

階段関数

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$



$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$$

ガウス関数

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{a^2}\right)$$

ローレンツ関数

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(x-x')^2 + \epsilon^2}$$

フェルミ分布関数の微分

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{d}{dx} \frac{1}{e^{\beta(x-x')} + 1}$$

δ 関数の表現

テキスト: p. 23

