

統計物理学Ⅲ

物性理論 柴田尚和

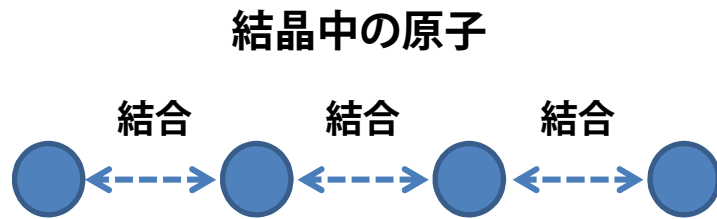
目的

量子多体系の性質を統計力学に基づいて解析し、
相互作用により生じる多体効果を理解する

内容

1. 格子振動の熱力学、統計力学
2. スピン系の相転移と熱力学、平均場近似
3. 強く相互作用する電子系の臨界的性質
4. 超伝導と対称性の破れ
5. 非平衡統計力学と線形応答理論

相互作用する多粒子系の力学



結晶を構成している

原子間距離について平衡点が存在

平衡点の周りでポテンシャルエネルギーを展開すると2次関数になり、調和振動子と等価になる。

n 番目の原子に働く力

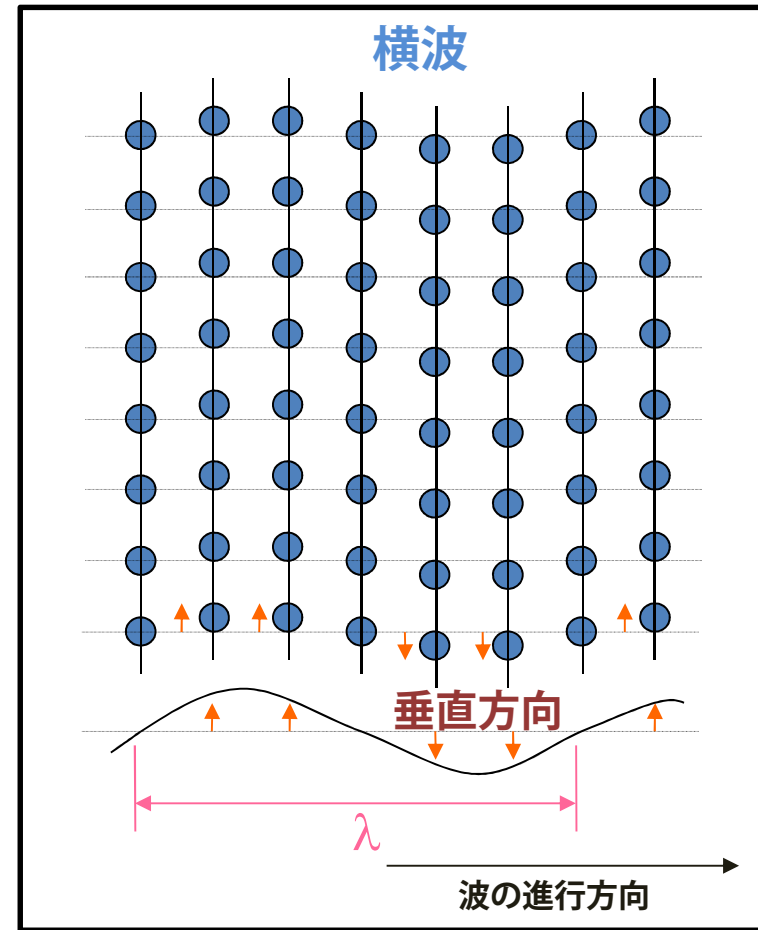
$$F_n = C(u_{n+1} - u_n) - C(u_n - u_{n-1})$$

u_n : n 番目の原子面の平衡点からのずれ

運動方程式

$$M \frac{d^2}{dt^2} u_n = C(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

└─→ 縦波 $C_{\parallel}$ ヤング率 横波 $C_{\perp}$ 剛性率



格子振動

K and $K+2\pi/a$ are equivalent

$$M \frac{d^2}{dt^2} u_n = C(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

$$-M\omega^2 u_n = 2C(\cos(Ka) - 1)u_n$$

$$u_n = u \exp(iKna - i\omega t)$$

$$= u \exp(iKna + i2\pi n - i\omega t)$$

$$= u \exp(i(K+2\pi/a)na - i\omega t)$$

$$-\omega^2 = \frac{2C}{M} (\cos(Ka) - 1)$$

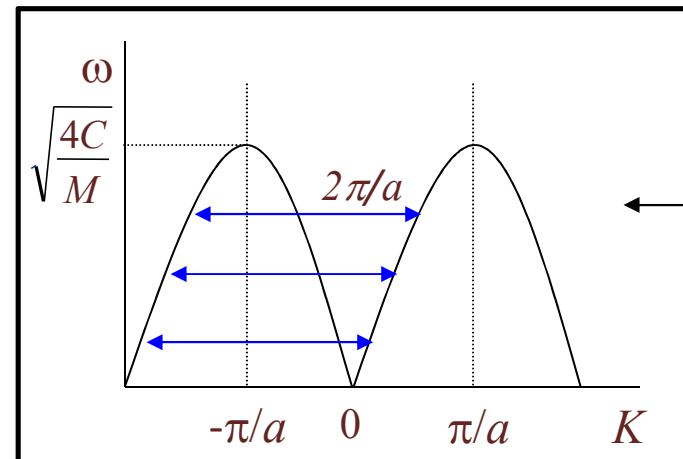
$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{4C}{M} \sin^2 \left(\frac{1}{2} Ka \right)$$

分散関係

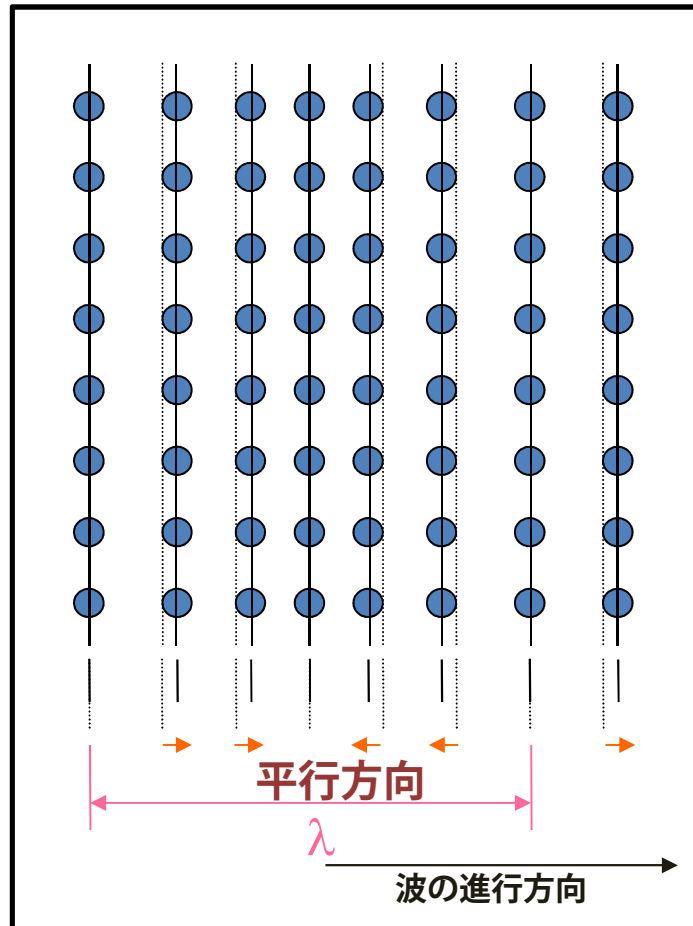
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \frac{1}{2} Ka \right|$$

C
 $\downarrow$
 縦波 $C_{\parallel}$ ヤング率
 横波 $C_{\perp}$ 剛性率

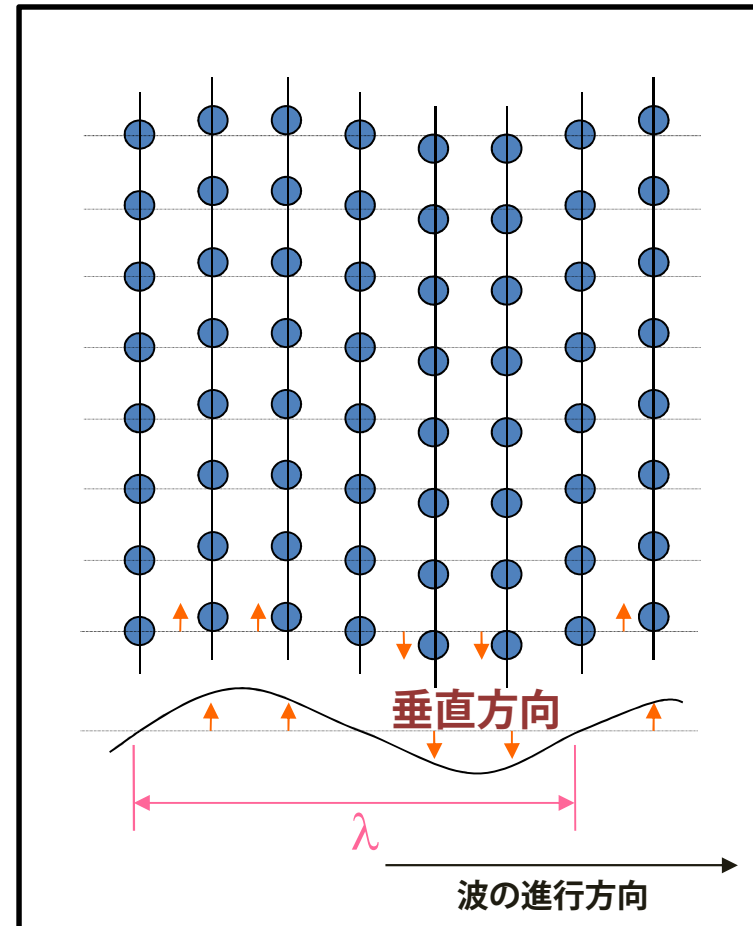


格子振動のモード

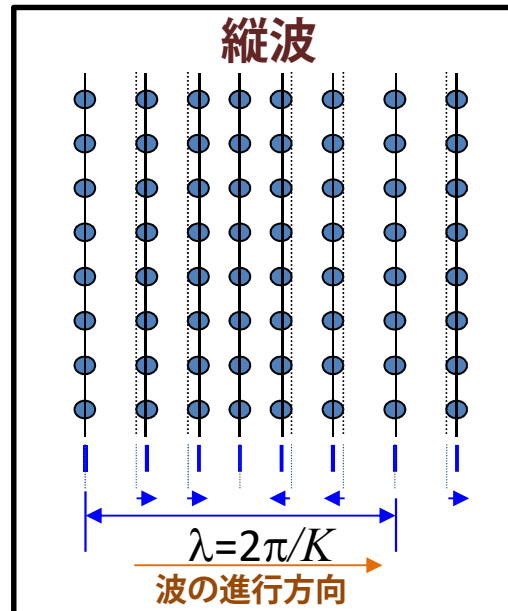
縦波



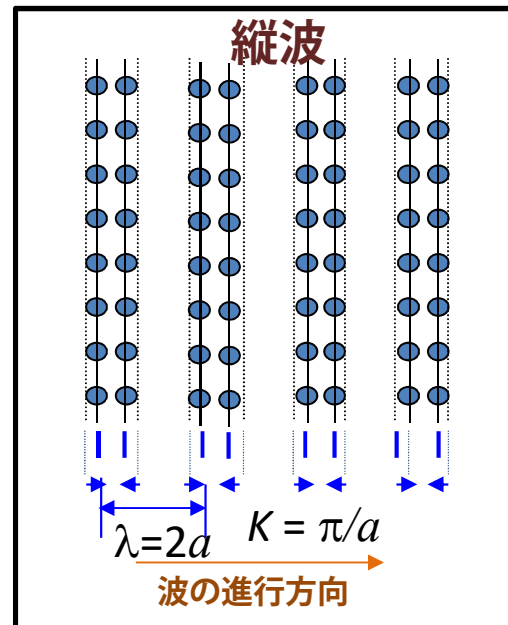
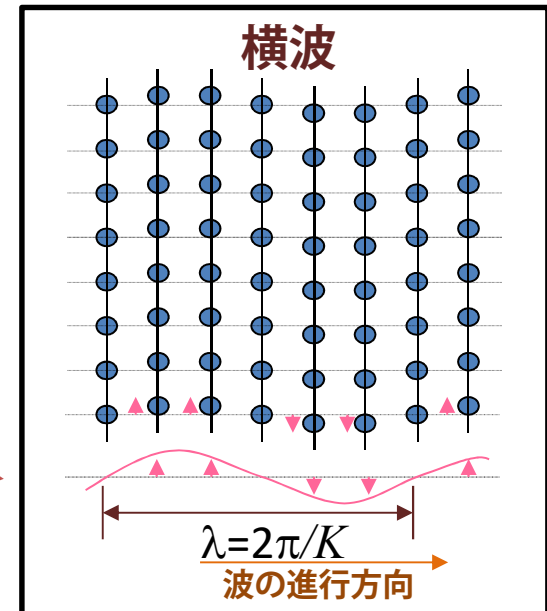
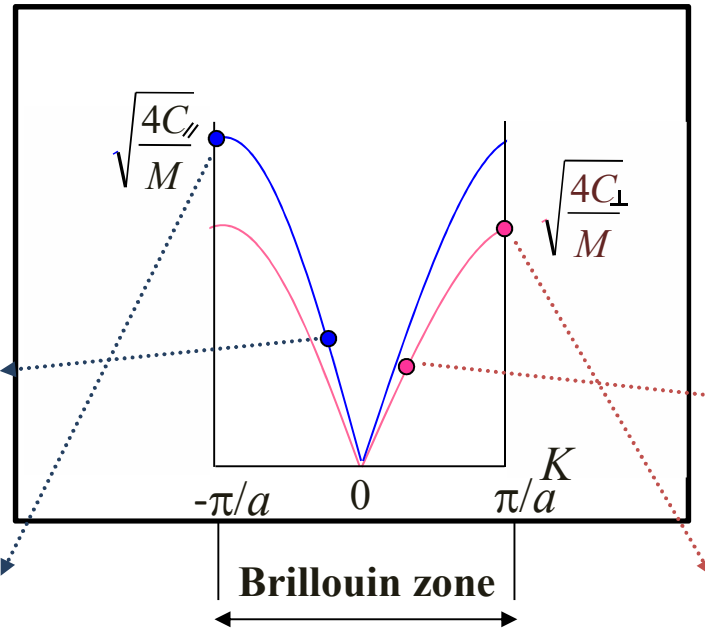
横波



格子振動



$C_{//}$ Yang's modulus $C_{\perp}$ Rigidity modulus

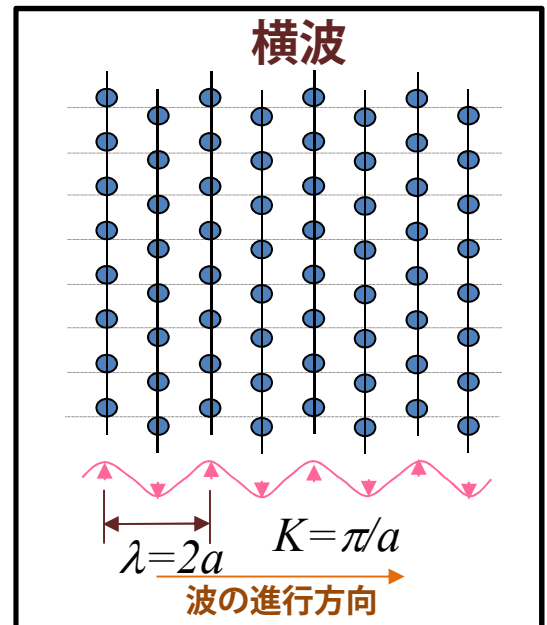


原子面の数: $N \rightarrow N$ 個の独立な K

$$-\frac{\pi}{a} < K \leq \frac{\pi}{a}$$

ゾーン境界 $K = \pi/a$

$$u_{n+1} = -u_n$$



フォノン

基準座標 q_k への変換

$$[q_k, P_{k'}] = i\hbar \delta_{k,k'}$$

$$q_k = N^{-1/2} \sum_n u_n \exp(-ikna) \quad u_n : n \text{ 番目の原子面の変位}$$

$$P_k = N^{-1/2} \sum_n p_n \exp(ikna) \quad p_n : n \text{ 番目の原子面の運動量}$$

$2M \times$ 運動エネルギー $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_n p_n^2 &= N^{-1} \sum_n \sum_k \sum_{k'} P_k P_{k'} \exp[-i(k+k')na] = \sum_k \sum_{k'} P_k P_{k'} \delta_{-k,k'} \\ &= \sum_k P_k P_{-k} \end{aligned}$$

$2/C \times$ ポテンシャルエネルギー $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_n (u_{n+1} - u_n)^2 &= N^{-1} \sum_n \sum_k \sum_{k'} q_k q_{k'} \exp(ikna) [\exp(ika) - 1] \times \exp(ik'na) [\exp(ik'a) - 1] \\ &= \sum_k q_k q_{-k} 2(1 - \cos ka) \end{aligned}$$

調和振動子

独立な調和振動子の集合

$$H = \sum_k \left\{ \frac{1}{2M} P_k P_{-k} + \frac{1}{2} M \omega_k^2 q_k q_{-k} \right\}$$

$$\omega_k^2 = \frac{2C}{M} (1 - \cos ka)$$

$$i\hbar \dot{q}_k = [q_k, H] = i\hbar P_{-k}/M$$

$$\begin{aligned} i\hbar \ddot{q}_k &= [\dot{q}_k, H] = M^{-1} [P_{-k}, H] \\ &= -i\hbar \omega_k^2 q_k \end{aligned}$$

調和振動子の運動方程式 $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0$

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right)$$

フォノンの生成演算子
消滅演算子