

Ising 模型

ハイゼンベルグ模型に含まれる非対角要素を省いたもの

イジング 模型

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z$$

固有状態は古典的に表現可能



基底状態は Neel 状態 ($J>0$)、あるいは強磁性状態 ($J<0$)

熱力学的な性質は 2^N の固有状態の分布によって与えられる

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

個々の S_i^z について独立に計算できない → 多体問題の難しさ

平均場近似

相互作用する相手の自由度を平均値で近似する $m = \langle S_j^z \rangle$

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \underbrace{(S_i^z - \langle S_i^z \rangle)}_{\delta S_i^z} \underbrace{+ \langle S_i^z \rangle}_{\delta S_j^z} (S_j^z - \langle S_j^z \rangle + \langle S_j^z \rangle) - H \sum_i S_i^z$$



2次の微小量 $\delta S_i^z \cdot \delta S_j^z$ を無視する

$$\sim J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^z - \langle S_i^z \rangle) \langle S_j^z \rangle + \langle S_i^z \rangle (S_j^z - \langle S_j^z \rangle) + \langle S_i^z \rangle \langle S_j^z \rangle - H \sum_i S_i^z$$

$$= J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z \langle S_j^z \rangle + \langle S_i^z \rangle S_j^z - \langle S_i^z \rangle \langle S_j^z \rangle - H \sum_i S_i^z$$

$$= \sum_i (2JN_D m - H) S_i^z - |J| N N_D m^2 = H_{MF} \quad N_D : \text{次元数}$$

平均場近似

$$Z_{MF} = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}_{MF}}$$

$$= \text{Tr} \exp \left\{ -\beta \left[\sum_i S_i^z (2JmN_D - H) + |J|NN_D m^2 \right] \right\}$$

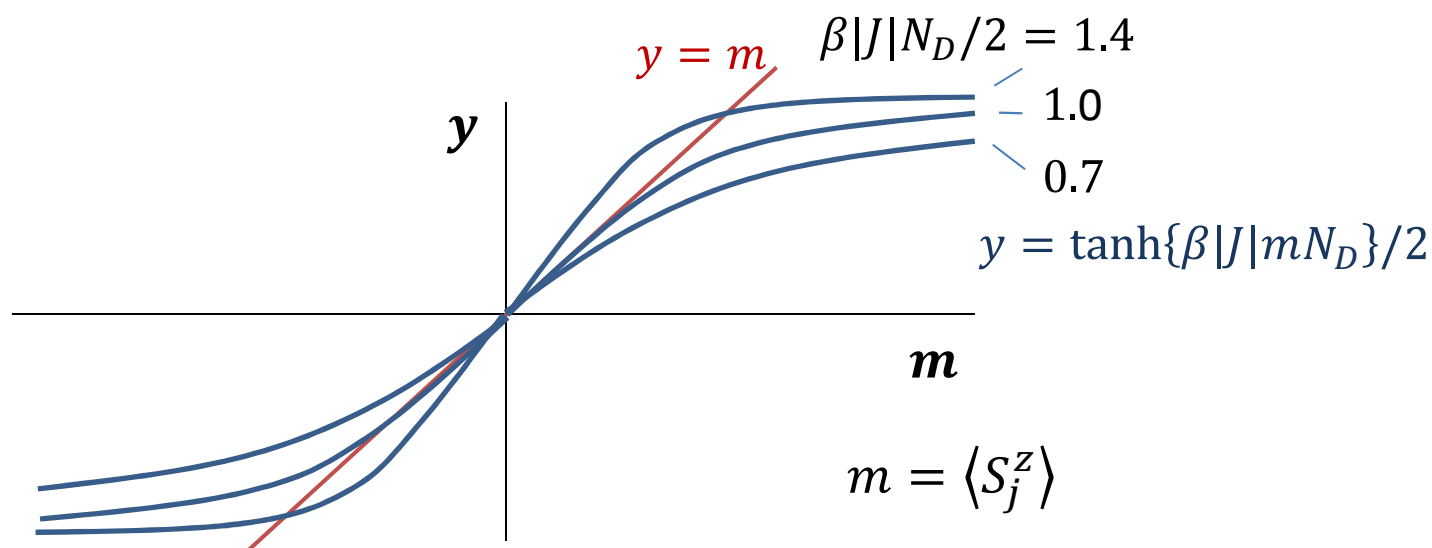
$$= [2 \cosh\{\beta(JmN_D - H/2)\} \exp(-\beta|J|N_D m^2)]^N \quad N_D : \text{次元数}$$

$$M = \sum_i \langle S_i^z \rangle = Nm = \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta H)} = -\frac{N}{2} \tanh\{\beta JmN_D\} \quad (H \rightarrow 0)$$

セルフコンシステント方程式 $m = \frac{1}{2} \tanh\{\beta|J|mN_D\}$

セルフコンシステント方程式の解

$$H = 0 \quad m = \tanh\{\beta|J|mN_D\}/2$$



$\beta|J|N_D > 2$ $|J|N_D/2 > k_B T$ **秩序相 (反強磁性、強磁性相)**

$\beta|J|N_D = 2$ $|J|N_D/2 = k_B T$ **転移点、転移温度**

$\beta|J|N_D < 2$ $|J|N_D/2 < k_B T$ **無秩序相 (常磁性相)**

転移点付近の振る舞い

磁化

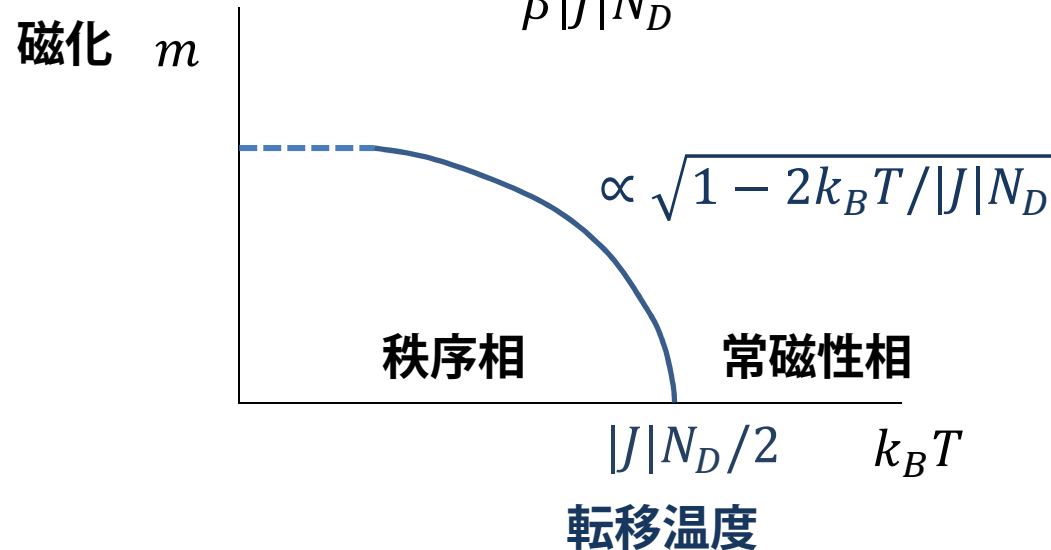
m が小さい領域であるから $\tanh\{\beta|J|mN_D\}/2 \sim \beta|J|mN_D/2 - \frac{1}{3}(\beta|J|mN_D)^3/2 + \dots$

$$m = \beta|J|mN_D/2 - \frac{1}{3}(\beta|J|mN_D)^3/2 + \dots \quad \text{が成り立つ}$$

$$\frac{1}{3}(\beta|J|N_D)^3 m^2/2 = \beta|J|N_D/2 - 1 \longrightarrow m^2 = \frac{3}{(\beta|J|N_D)^3} (\beta|J|N_D - 2)$$

平均場近似の特徴

$$m \sim \frac{\sqrt{3}}{\beta|J|N_D} \sqrt{1 - 2k_B T/|J|N_D} \quad \left[\frac{k_B T}{|J|N_D} < 1/2 \right]$$



転移点付近の振る舞い

$$Z_{MF} = \text{Tr } e^{-\beta H_{MF}} = [2 \cosh\{\beta J m N_D\} \exp(-\beta |J| N_D m^2)]^N$$

エネルギー

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln Z_{MF}}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (N \ln[2 \cosh\{\beta |J| m N_D\}] - N N_D \beta |J| m^2) \\ &= -N |J| m N_D \tanh\{\beta |J| m N_D\} + N N_D |J| m^2 \end{aligned}$$

$$\beta \sim 2/|J|N_D \text{ より } \sim -N |J| m N_D 2m + N N_D |J| m^2 = -N N_D |J| m^2$$

