

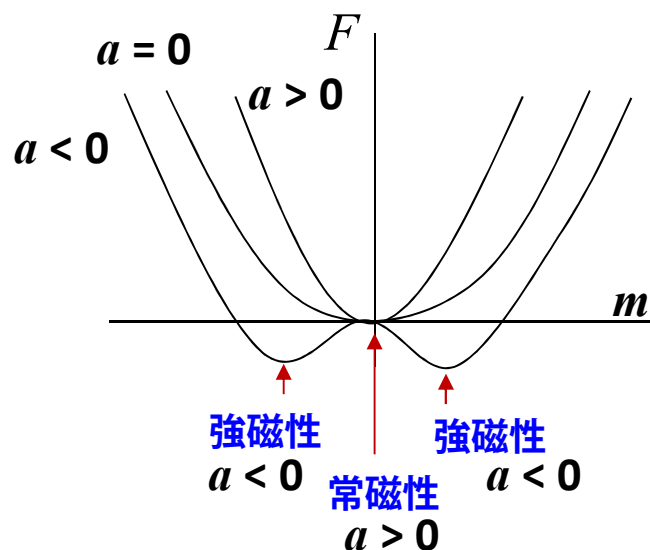
相転移のランダウ理論

自由エネルギー F を磁化 m についてベキ展開する

$$F = am^2 + bm^4 + cm^6 + \dots - Hm$$

$H = 0$

$b > 0$



$H = 0$ でスピン反転対称性があるとき
 m を $-m$ にしても同じ値になる

→ 奇数次のベキはない

F を最小にするように磁化 m が決まる

2次の係数 a の正負が常磁性、強磁性を決定

2 次相転移のランダウ理論

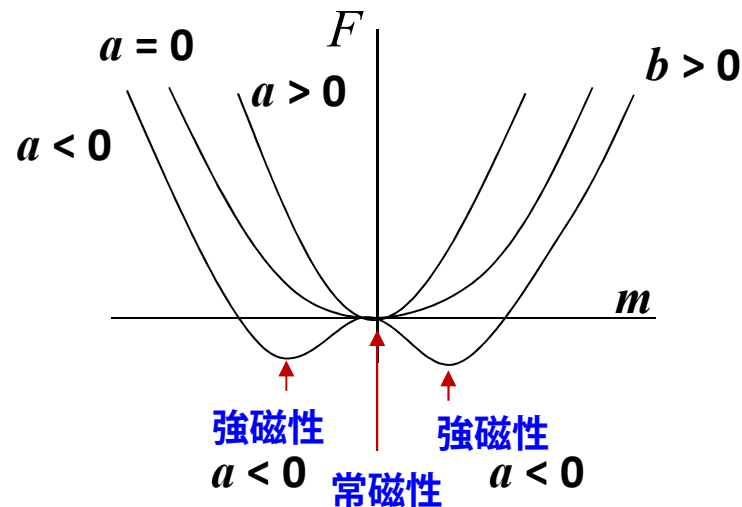
$$Z_{MF} = \text{Tr} e^{-\beta H_{MF}}$$

$$F_{MF} = -k_B T N \ln[\cosh\{\beta J m N_D\}] + |J| N N_D m^2$$

$$F_{MF} = -k_B T \ln Z_{MF}$$

転移点近傍で $a \approx a_0(T - T_c)$, $a_0 > 0$, $b > 0$

$$F_{MF} = a_0(T - T_c)m^2 + bm^4 + \dots$$



$T = T_c$ で自発磁化が現れる

自由エネルギー極小の条件

$$\frac{\partial F_{MF}}{\partial m} = 2a_0(T - T_c)m + 4bm^3 = 0$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{a_0(T - T_c)}{2b}}$$

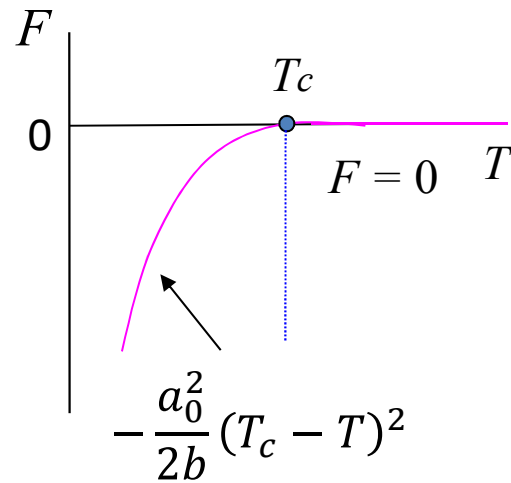
$$T < T_c, \quad a < 0$$

$$m = 0$$

$$T > T_c, \quad a > 0$$

2 次の相転移に伴う自由エネルギーの変化

$$F_{MF} = a_0(T - T_c)m^2 + bm^4$$



$$m = \pm \sqrt{\frac{a_0(T - T_c)}{2b}}$$

$$T < T_c$$

$$m = 0$$

$$T > T_c$$

$T = T_c$ において F は連続、

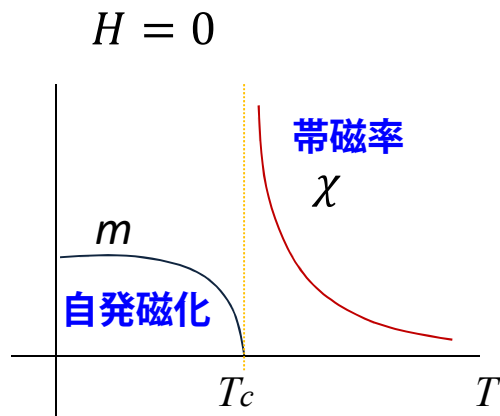
F の 1 階微分も連続

F の 2 階微分が不連続 → 2 次相転移

F の 1 階微分が不連続の場合 → 1 次相転移

転移点近傍の臨界指数

$$\frac{\partial F_{MF}}{\partial m} = 2a_0(T - T_c)m + 4bm^3 - H = 0$$



$$T > T_c \quad m \sim 0$$

$$2a_0(T - T_c)m = H \quad \Rightarrow \quad m = \frac{H}{2a_0(T - T_c)}$$

帯磁率

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1}{2a_0(T - T_c)} \propto |T - T_c|^{-\gamma}$$

$$\gamma = 1$$

自発磁化 $T < T_c \quad H = 0$

$$m = \pm \sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{2b}} \propto (T_c - T)^\beta$$

$$\beta = 1/2$$

ランダウ理論に基づく 2 次相転移の臨界指数

$$\gamma = 1$$

$$\beta = 1/2$$

相互作用の詳細に依らない

1次元Ising模型の厳密解

1次元イジング 模型 $\mathcal{H} = \frac{J}{4} \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$

$$Z_N = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \exp\left[-\frac{\beta J}{4}(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \cdots + \sigma_N \sigma_1)\right]$$

$$\bar{Z}_1 = \begin{pmatrix} Z_1(+ +) & Z_1(+ -) \\ Z_1(- +) & Z_1(- -) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\beta J/4} & e^{\beta J/4} \\ e^{\beta J/4} & e^{-\beta J/4} \end{pmatrix} \text{ 転送行列}$$

$$\begin{aligned} Z_N &= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} Z_1(+ +)^{\sigma_1 \sigma_2} & Z_1(+ -)^{\sigma_1 \sigma_2} \\ Z_1(- +)^{\sigma_1 \sigma_2} & Z_1(- -)^{\sigma_1 \sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(+ +)^{\sigma_2 \sigma_3} & Z_1(+ -)^{\sigma_2 \sigma_3} \\ Z_1(- +)^{\sigma_2 \sigma_3} & Z_1(- -)^{\sigma_2 \sigma_3} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} Z_1(+ +)^{\sigma_N \sigma_1} & Z_1(+ -)^{\sigma_N \sigma_1} \\ Z_1(- +)^{\sigma_N \sigma_1} & Z_1(- -)^{\sigma_N \sigma_1} \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} e^{-\beta J/4} & e^{\beta J/4} \\ e^{\beta J/4} & e^{-\beta J/4} \end{pmatrix}^N \right] \end{aligned}$$

転送行列法

$$Z_N = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} e^{-\beta J/4} & e^{\beta J/4} \\ e^{\beta J/4} & e^{-\beta J/4} \end{pmatrix}^N \right] \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2\cosh(-\beta J/4) \\ \lambda_2 &= 2\sinh(-\beta J/4) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\beta J/4} & e^{\beta J/4} \\ e^{\beta J/4} & e^{-\beta J/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{Z}_1 = U D U^{-1}$$

$$U U^{-1} = U^{-1} U = 1$$

1次元イジング 模型の厳密解

$$Z_N = \text{Tr}[U D U^{-1} U D U^{-1} \dots U D U^{-1}]$$

$$= \text{Tr}[D^N] = \lambda_1^N + \lambda_2^N = 2^N \cosh^N(-\beta J/4) + 2^N \sinh^N(-\beta J/4)$$

$$F = -k_B T \ln Z_N = -k_B T \ln(2^N \cosh^N(-\beta J/4) + 2^N \sinh^N(-\beta J/4))$$