

1次元イジング 模型のスピンの相関関数

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{\sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \sigma_i \sigma_j e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z_N}$$

$$= \text{Tr} \left[\bar{Z}_1^{i-1} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Z}_1^{j-i} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_j \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Z}_1^{N-j+1} \right] / Z_N$$

$$= \langle \lambda_1 | \lambda_1^{i-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Z}_1^{j-i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda_1^{N-j+1} | \lambda_1 \rangle / Z_N$$

$$+ \langle \lambda_2 | \lambda_2^{i-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Z}_1^{j-i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda_2^{N-j+1} | \lambda_2 \rangle / Z_N$$

$$= (\lambda_1^{i-1} \lambda_2^{j-i} \lambda_1^{N-j+1} + \lambda_2^{i-1} \lambda_1^{j-i} \lambda_2^{N-j+1}) / (\lambda_1^N + \lambda_2^N)$$

$$= \frac{(\lambda_2/\lambda_1)^{j-i} + (\lambda_2/\lambda_1)^{N-j+1}}{1 + (\lambda_2/\lambda_1)^N}$$

$$\sim (\lambda_2/\lambda_1)^{j-i} = e^{-(j-i)/\xi}$$

$$\xi^{-1} = -\ln(\lambda_2/\lambda_1)$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \langle \lambda_2 | &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \cosh(-\beta J/4) \\ \lambda_2 &= 2 \sinh(-\beta J/4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}) = \langle \lambda_2 | \\ \langle \lambda_2 | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}) = \langle \lambda_1 | \end{aligned}$$

ハバード模型の基底状態とTL流体

1D system 厳密解は長距離秩序がないことを示す

$N_e/N \neq 1$ **TL 液体 (常磁性金属)**

$$\langle n_i \cdot n_j \rangle = \frac{K_\rho}{\pi^2 (i-j)^2} + \frac{A_1}{|i-j|^{(K_\rho+1)}} \cos[2k_F (i-j)] + \frac{A_2}{|i-j|^{4K_\rho}} \cos[4k_F (i-j)]$$

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = \frac{1}{\pi^2 (i-j)^2} + \frac{B_1}{|i-j|^{(K_\rho+1)}} \cos[2k_F (i-j)]$$

電荷励起ギャップなし $\Delta_c = 0$ $K_\rho = 1 \text{ for } U = 0$
 スピン励起ギャップなし $\Delta_s = 0$ $K_\rho = 1/2 \text{ for } U = \infty$

$N_e/N = 1$ **任意の U で絶縁体 (Mott 絶縁体)**

電荷励起ギャップあり $\Delta_c = \begin{cases} \sqrt{Ut} \exp(-1/\rho U) & \text{for } U \ll t \\ U - 4t & \text{for } U \gg t \end{cases}$

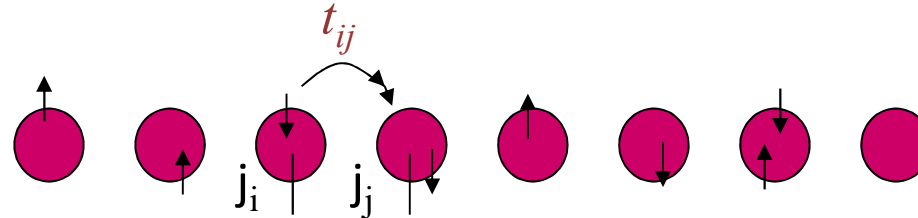
スピン励起ギャップなし $\Delta_s = 0$

2D, 3D systems 厳密解なし

$N_e/N = 1$ **反強磁性秩序**
 $N_e/N \neq 1$ **強磁性, 超伝導?**

ハバード模型

直交基底関数 j



$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ji} c_{j\sigma}^* c_{i\sigma} + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}$$

i, j : サイト座標

s : スピン状態 ($\uparrow$ or $\downarrow$)

遷移積分

$$t_{ji} = \int d\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r} + \mathbf{d}_{ji}) H \varphi(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{d}_{ji} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i$$

c^*, c : 電子の生成消滅演算子

$$\{c_{i\sigma}^*, c_{j\sigma'}\} = c_{i\sigma}^* c_{j\sigma'} + c_{j\sigma'} c_{i\sigma}^* = \delta_{ij} \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\{c_{i\sigma}^*, c_{j\sigma'}^*\} = 0$$

$$\{c_{i\sigma}, c_{j\sigma'}\} = 0$$

$n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^* c_{i\sigma}$: 数演算子

H : 1体のハミルトニアン

(運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー)

クーロンエネルギー

$$U = \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi^*(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_1)$$

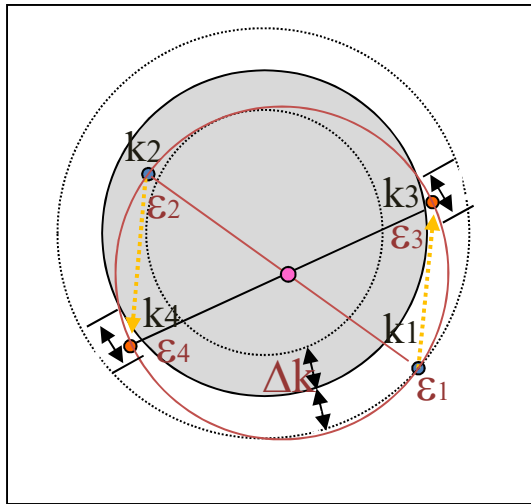
フェルミ液体論

金属中の電子の平均距離 $2\text{\AA}$

室温での平均自由行程は $10000\text{\AA}$, 1K で 10cm

クーロン相互作用が存在しているにもかかわらず自由電子のように振る舞うのはなぜか?

フェルミ球の外側の k_1 の電子がフェルミ球内の k_2 (energy ε_2) の電子によって散乱される過程を考える



k_2 の電子がフェルミ球の内側の限られた範囲にないと散乱が生じない

エネルギーと運動量の保存則

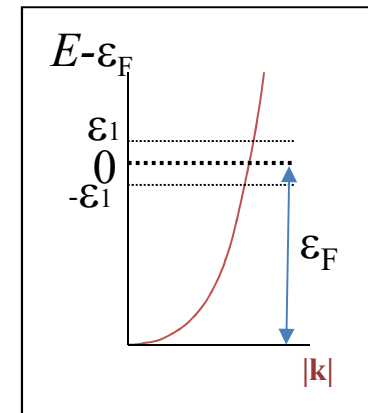
$$k_1 \rightarrow k_3$$

$$k_2 \rightarrow k_4$$

散乱前 散乱後

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4$$



確率 ①

$$\sim \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_F}$$

k_3 と k_4 の電子は同じ円周上にあり、ともにフェルミ球の外側でなければならない

円周上の Δk の限られた範囲しか許されない

確率 ②

$$\sim \frac{\Delta k}{k_F} \sim \frac{v_F \Delta k}{v_F k_F} \sim \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_F}$$

$$\text{散乱確率} = \text{確率 ①} \times \text{確率 ②} \approx \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_F} \right)^2 \approx \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2$$

低温の極限で散乱が禁止される